BROWN
BOOK ONLY

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES

PAR

C. GUICHARD

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA SORBONNE

QUINZIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

—

1933

TRAITÉ DE MÉCANIQUE

(Cinématique, Dynamique et Statique).

DU MÊME AUTEUR

Traité de Géométrie (11e édition) à l'usage des élèves de Seconde, de Première et de Mathématiques. — Un vol. 22/14^{cm}. . . **32 fr. »**

Compléments de Géométrie (5e édition, entièrement refondue), à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales. — Un volume 22/14^{cm}. . . . . **32 fr. »**

TRAITÉS DE MATHÉMATIQUES

à l'usage des élèves de Mathématiques

(Vol. 22/14^{cm}, brochés.)

Traité d'Arithmétique, par A. Grévy, professeur au lycée Saint-Louis. 8e édition. . . . . **15 fr. »**

Traité d'Algèbre, par A. Grévy. 10e édition. . . . . . **32 fr. »**

Traité de Trigonométrie, par A. Grévy. 13e édition. . . . **15 fr. 50**

Traité de Géométrie (Compléments), par A. Grévy. 7e édit. **17 fr. 50**

Traité de Géométrie descriptive, par T. Chollet, professeur au lycée Carnot, à Paris, et H. de Lapierre, professeur au lycée Saint-Louis. 10e édition. . . . . **13 fr. »**

Traité de Cosmographie, par A. Grignon. 18e édition.. . **17 fr. 50**

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES

PAR

C. GUICHARD

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA SORBONNE

QUINZIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

—

1933

TRAITÉ DE MÉCANIQUE

CHAPITRE I

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES VECTEURS

1. Définitions. — Un vecteur est une portion de droite dans laquelle on distingue les deux extrémités A, B. On représente ordinairement un vecteur par la notation AB. Le point A est appelé l'origine, le point B l'extrémité du vecteur AB. Un vecteur est bien défini quand on se donne son origine et son extrémité.

Trois éléments sont à considérer dans un vecteur : 1° la droite qui lui sert de support ; 2° la longueur ; 3° le sens, qui est celui dans lequel se déplace un mobile qui va de l'origine à l'extrémité.

Ainsi, les vecteurs AB, BA ont la même droite de support, la même longueur, mais ils sont de sens contraires.

On dit que deux vecteurs sont *équivalents* lorsqu'ils sont portés par la même droite, qu'ils ont même longueur, même sens.

Deux vecteurs qui ont même longueur, même sens, dont les supports sont parallèles, sont dits *équipollents*.

Si A et B coïncident, la longueur du vecteur AB est nulle. Le vecteur AB est dit vecteur nul.

2. Somme géométrique. — Soient OA, OB deux vecteurs qui ont la même origine O ; construisons le parallélogramme OACB qui a pour côtés OA, OB. Le vecteur OC, représenté par la diagonale OC de ce parallélogramme, est la *somme géométrique* ou *résultante* des vecteurs OA, OB. On représente cette égalité géométrique par l'équation

$$(OC) = (OA) + (OB).$$

On met chaque vecteur entre parenthèses pour distinguer les sommes géométriques des sommes algébriques.

Les vecteurs OA, OB sont appelés les composantes du vecteur OC.

En projetant sur un axe quelconque, on aura

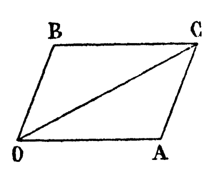


Fig. 1.

$$\text{pr. OC} = \text{pr. OA} + \text{pr. AC},$$

ou, en remarquant que les projections de AC et de OB sur un même axe sont égales,

$$\text{pr. OC} = \text{pr. OA} + \text{pr. OB}.$$

Donc :

La projection de la résultante de deux vecteurs sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des deux vecteurs sur le même axe.

3. Considérons un nombre quelconque de vecteurs OA, OB, OC, ..., OL. Pour obtenir la somme géométrique ou la résultante de tous ces vecteurs, on fait la somme des deux premiers, puis au vecteur ainsi obtenu on ajoute le troisième, à la somme obtenue on ajoute le quatrième, et ainsi de suite jusqu'au dernier vecteur, OL.

Il résulte de cette construction et de la propriété établie au précédent paragraphe que

La projection de la résultante de plusieurs vecteurs sur un axe est égale à la somme des projections de tous ces vecteurs sur le même axe.

Cette propriété montre que

La somme géométrique de plusieurs vecteurs est indépendante de l'ordre dans lequel on place ces vecteurs.

On ne change pas la somme géométrique de plusieurs vecteurs en remplaçant un certain nombre d'entre eux par leur somme géométrique.

Si OR est la somme géométrique des vecteurs OA, OB, ..., OL, on dit que ces vecteurs OA, ..., OL sont les composantes de OR.

4. Décomposition d'un vecteur. — Soient Ox, Oy deux

droites quelconques, OA un vecteur quelconque situé dans leur plan. Je dis qu'on peut toujours, et d'une seule manière, trouver deux vecteurs OB, OC admettant respectivement pour support Ox, Oy, ayant pour résultante OA.

Par le point A je mène une parallèle à Oy qui coupe Ox en B et une parallèle à Ox qui coupe Oy en C. La droite OA est la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés OB et OC.

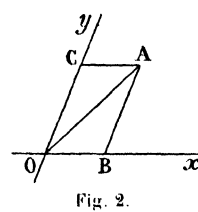


Fig. 2.

Donc $(OA) = (OB) + (OC)$.

Il n'existe pas d'autre parallélogramme ayant ses côtés sur Ox et Oy et admettant pour diagonale OA.

On dit qu'on a décomposé le vecteur OA en deux autres portés sur Ox, Oy.

Soient Ox, Oy, Oz trois droites non situées dans un même plan, OA un vecteur quelconque. On peut toujours, et d'une seule manière, trouver trois vecteurs OB, OC, OD admettant pour supports Ox, Oy, Oz et ayant pour résultante OA.

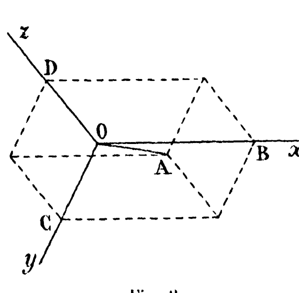


Fig. 3.

En effet, les plans menés par A parallèlement aux plans yz, zx, xy coupent Ox, Oy, Oz aux points B, C, D. Le parallélépipède qui a pour arêtes OB, OC, OD a pour diagonale OA ; on voit donc que

$$(OA) = (OB) + (OC) + (OD).$$

Il n'existe pas d'autre parallélépipède ayant pour diagonale OA et ayant ses arêtes sur Ox, Oy, Oz.

On dit qu'on a décomposé le vecteur OA en trois autres portés par Ox, Oy, Oz.

5. Remarque. — Si l'on considère des axes orientés Ox, Oy, Oz, les composantes OB, OC, OD ont des valeurs algébriques. Ces valeurs algébriques sont les coordonnées du point A.

6. Détermination des composantes d'un vecteur. — Supposons en particulier que le trièdre $Oxyz$ soit trirectangle. Les points B, C, D sont les projections orthogonales du point A sur Ox, Oy, Oz. En désignant par X, Y, Z les valeurs algébriques des composantes OB, OC, OD, par R la longueur OA, on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= R\cos(Ox, OA), \\ Y &= R\cos(Oy, OA), \\ Z &= R\cos(Oz, OA). \end{aligned} \right.$$

Si l'on projette sur un axe Δ quelconque, on aura

$$\text{pr. } OA = \text{pr. } OB + \text{pr. } OC + \text{pr. } OD,$$

et par conséquent

$$\text{pr. } OA = X\cos(Ox, \Delta) + Y\cos(Oy, \Delta) + Z\cos(Oz, \Delta).$$

En particulier, si l'on projette sur la direction OA, la projection de OA est R. Donc

$$R = X\cos(Ox, OA) + Y\cos(Oy, OA) + Z\cos(Oz, OA),$$

et, en tenant compte des formules (1), on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(Ox, OA) + \cos^2(Oy, OA) + \cos^2(Oz, OA), \\ R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2. \end{aligned}$$

7. Détermination analytique de la résultante. — Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des vecteurs qui ont pour origine O. Menons par O trois axes non situés dans un même plan, Ox, Oy, Oz. Soient $X_1, Y_1, Z_1; \ldots; X_n, Y_n, Z_n$ les composantes des vecteurs $P_1, \ldots, P_n$.

Désignons par OR la résultante. Pour définir ce vecteur OR, il suffit de connaître ses trois composantes X, Y, Z. Ses composantes sont les projections de ce vecteur sur les axes. On aura donc (2)

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n. \end{aligned}$$

Théorie des moments.

8. Sens relatif de deux vecteurs. — Soient AB et CD deux vecteurs, MN une droite rencontrant AB en M et CD en N. Par un point quelconque O, menons les demi-droites Ox, Oy, Oz ayant respectivement même direction que MN, CD, AB. Cela posé, si le trièdre $Oxyz$ est de sens positif (*Traité de Géométrie*, tome I, n° 598), nous dirons que le vecteur CD est de sens positif relativement au vecteur AB; inversement, si le trièdre $Oxyz$ est de sens négatif, le vecteur CD est de sens négatif relativement au vecteur AB.

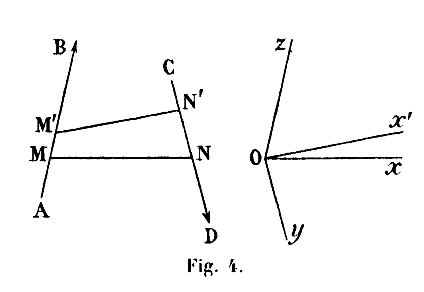


Fig. 4.

Pour justifier cette définition, il faut montrer que le sens ainsi défini ne dépend pas de la position de la sécante MN, c'est-à-dire que si l'on prend une autre sécante, si l'on désigne par Ox' la demi-droite qui a même direction que M'N', les deux trièdres $Oxyz$, $Ox'yz$ ont le même sens.

En effet, soit Π le plan mené par AB parallèlement à la droite CD; ce plan est parallèle au plan yOz. Les points N, N' sont situés d'un même côté du plan Π; par conséquent les demi-droites Ox, Ox' sont d'un même côté du plan yOz. Donc les deux trièdres $Oxyz$, $Ox'yz$ ont le même sens.

9. Remarque I. — Si l'on permute les deux vecteurs AB et CD, cela revient à remplacer AB, CD, MN par CD, AB, NM, c'est-à-dire à faire sur le trièdre $Oxyz$ les opérations suivantes: 1° permuter Oy, Oz; 2° changer le sens de Ox. Chacune de ces opérations change le sens du trièdre. Après les deux opérations, le sens n'a pas changé.

Le sens relatif du vecteur CD par rapport au vecteur

AB est le même que le sens relatif de AB par rapport à CD.

Ce sens commun est le sens relatif des deux vecteurs.

10. Remarque II. — Dans la définition du sens relatif des deux vecteurs prenons le point O en A, pour sécante MN la droite AC ; le trièdre $Oxyz$ aura pour arête Ox la demi-droite AC, pour arête Oy la demi-droite qui a même direction que CD et pour arête Oz la demi-droite AB. CD et Oy étant d'un même côté par rapport au plan xOz, les deux dièdres CABD et $xOzy$ ont le même sens. Par suite, si le sens relatif des deux vecteurs est le sens positif, le dièdre CADB est de sens positif; il est de sens négatif dans le cas contraire. Donc : *le sens relatif de deux vecteurs* AB, CD *est le même que le sens du déplacement de* C *à* D *par rapport à l'axe* AB.

11. Remarque III. — Soit un vecteur AB et deux vecteurs OM, OM'. Formons les trièdres qui définissent les sens de AB par rapport à OM, OM'. Les droites Oy, Oy' sont les mêmes puisqu'elles ont la direction de AB. On peut supposer que les droites Ox ont même direction que OA. Les droites Oz de ces trièdres sont les droites OM, OM'. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs OM, OM' *aient même sens par rapport au vecteur* AB *est que les points* M, M' *soient du même côté du plan* OAB.

12. Moment d'un vecteur par rapport à un point. — Le moment d'un vecteur AB par rapport à un point O, que l'on représente par la notation $m'_O AB$, est *un vecteur* OG perpendiculaire au plan OAB, dirigé dans un sens tel que le sens relatif des vecteurs AB et OG soit le sens positif, dont la longueur a la même mesure que le double de l'aire du triangle OAB. Si OH est la distance de O à la droite AB on a

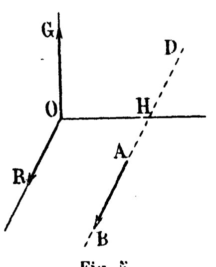


Fig. 5.

$$(1) \qquad OG = OH \times AB.$$

Si l'on mène le vecteur OR équipollent au vecteur AB, le trièdre OHRG est un trièdre trirec-

tangle positif. On peut écrire

$$\text{(2)} \qquad OG = OR \times OH.$$

Il est clair que si l'on remplace le vecteur AB par un vecteur équivalent, OR et OG ne changent pas ; que si l'on déplace le point O sur le support de OR, les vecteurs moments obtenus sont équipollents.

13. Remarque. — Pour que le moment d'un vecteur AB par rapport à un point O soit nul, il faut et il suffit que l'on ait soit AB = 0, soit OH = 0.

Le vecteur AB est un vecteur nul, ou le vecteur AB passe par O.

14. Réciproque. — Si l'on se donne deux vecteurs rectangulaires OR et OG, représentant le premier la grandeur géométrique d'un vecteur, le second son moment par rapport au point O, le vecteur est déterminé.

En effet, la droite OH est perpendiculaire au plan ORG et le trièdre OHRG est de sens positif, ce qui détermine la direction de OH. L'équation (2) donne la longueur OH. Le point H étant connu, on mènera par ce point une droite D parallèle à OR. Sur cette droite, on prendra une origine arbitraire A et l'on construira le vecteur AB équipollent à OR d'origine A. Ce vecteur a pour grandeur géométrique OR, pour moment par rapport au point O OG.



Tous les vecteurs ainsi obtenus sont équivalents.

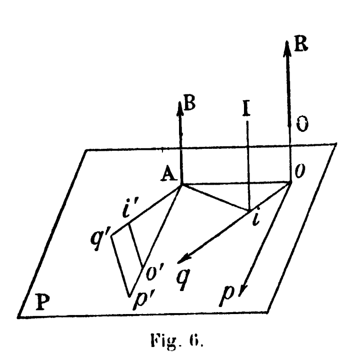


Fig. 6.

15. Variation du moment d'un vecteur par rapport à un point. — Théorème. — *Le moment d'un vecteur par rapport à un point* I *est la somme géométrique de deux vecteurs : 1° un vecteur équipollent au moment de* AB *par rapport à un point quelconque* O *; 2° le moment de* OR *par*

rapport au point I, OR *étant le vecteur équipollent au vecteur* AB *d'origine* O.

Nous avons remarqué que si l'on fait glisser le point O sur une parallèle au support de AB, les moments obtenus étaient des vecteurs équipollents.

Menons par le point A un plan P perpendiculaire à AB. Soient o, i les projections orthogonales de O et I sur le plan P. D'après la remarque précédente, les moments du vecteur AB par rapport aux points O, I sont équipollents aux moments de AB par rapport aux points o, i. Il en est de même des moments de OR par rapport aux points i, I. Il suffit donc de démontrer le théorème quand on remplace les points O et I par les points o et i.

Les moments op, iq du vecteur AB par rapport aux points o, i sont situés dans le plan P. Les angles $\mathrm{A}op$, $\mathrm{A}iq$ sont égaux à $-\frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$op = \mathrm{AB} \times \mathrm{A}o, \qquad iq = \mathrm{AB} \times \mathrm{A}i.$$

Menons par le point A les vecteurs $\mathrm{A}p'$, $\mathrm{A}q'$ équipollents aux vecteurs op, iq. Si l'on fait tourner le triangle $\mathrm{A}oi$ d'un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ autour de A, les points o, i viennent en o', i' sur les droites $\mathrm{A}p'$, $\mathrm{A}q'$, et l'on a

$$\frac{\mathrm{A}p'}{\mathrm{A}o'} = \frac{\mathrm{A}q'}{\mathrm{A}i'} = \mathrm{AB}.$$

Les deux triangles $\mathrm{A}p'q'$, $\mathrm{A}o'i'$ sont semblables et $p'q'$ est parallèle à $o'i'$ et fait par conséquent un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$ avec oi. De plus,

$$p'q' = \mathrm{AB} \times o'i' = \mathrm{AB} \times oi.$$

On voit que $p'q'$ est un vecteur équipollent au moment de OR par rapport au point i.

L'égalité géométrique

$$(\mathrm{A}q') = (\mathrm{A}p') + (p'q')$$

peut s'écrire

$$(iq) = (op) + (\mathrm{m}^{\mathrm{t}}\ \mathrm{OR\ p.\ rapport\ à}\ i),$$

ou encore

$$(m^t_i AB) = (m^t_o AB) + (m^t_i OR),$$
$$(m^t_I AB) = (m^t_O AB) + (m^t_I OR).$$

16. Moment d'un vecteur par rapport à un axe. — Soient D un axe orienté, AB un vecteur. Prenons sur l'axe D un point quelconque O et soit OG le moment de AB par rapport au point O. Par définition, le moment du vecteur AB par rapport à l'axe D est égal à la mesure algébrique de la projection de OG sur l'axe D.

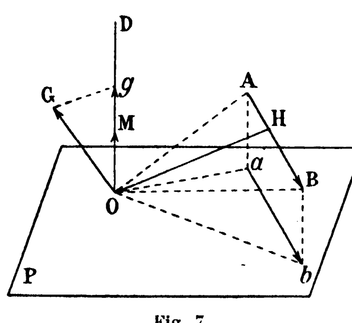


Fig. 7.

Pour justifier cette définition, il faut montrer que ce moment ne change pas lorsque le point O se déplace sur l'axe D.

Tout d'abord, le signe de la projection ne change pas. Prenons en effet sur l'axe D un vecteur OM dont la mesure algébrique est égale à $+1$. Si le sens relatif de AB et de OM est le sens positif, OM, OG sont d'un même côté du plan OAB (11, Rem. III), et par suite la projection de OG sur l'axe est positive. On voit de même que, si le sens relatif de OM et de AB est négatif, la projection de OG sur l'axe est négative. *Le signe du moment est le même que le sens relatif du vecteur* AB *et d'un vecteur de mesure* $+1$ *pris sur l'axe.*

Montrons maintenant que la valeur absolue de cette projection ne change pas.

Par le point O menons un plan P perpendiculaire à D ; soient a, b les projections de A, B sur le plan P. On a

$$OG = AB \times OH = 2 \text{ surf. } OAB$$

et

$$\text{pr. } OG = OG \cos(GOD) = 2 \text{ surf. } (OAB) \cos(P.\ OAB).$$
$$= 2 \text{ surf. } (Oab).$$

On voit que si le point O se déplace sur l'axe D, l'aire du tri-

angle Oab, qui représente la grandeur géométrique du moment, ne change pas.

17. On peut donner une autre interprétation géométrique de ce résultat.

Le moment du vecteur ab par rapport à O est un vecteur Og porté par l'axe D. Ce vecteur a pour mesure le double de l'aire du triangle Oab et même grandeur que le moment de AB par rapport à D.

Il en résulte immédiatement (**11**, Rem. III) que ce vecteur est la projection du vecteur OG sur l'axe D; donc :

Le moment du vecteur AB *par rapport à l'axe* D *est égal à la mesure algébrique, rapportée à l'axe* D, *du moment par rapport à* O *du vecteur ab, projection orthogonale de* AB *sur le plan* P.

18. Vecteurs concourants. — Théorème de Varignon. — *Le moment de la résultante de deux vecteurs par rapport à un point est la somme géométrique des moments de ces vecteurs par rapport au même point.*

Pour faciliter la démonstration de ce théorème, nous établirons d'abord les deux lemmes suivants.

Lemme I. — Si l'on décompose un vecteur PA en deux autres, l'un Pa' dirigé suivant la droite OP, l'autre Pa perpendiculaire à la droite OP, les deux vecteurs PA, Pa ont même moment par rapport au point O.

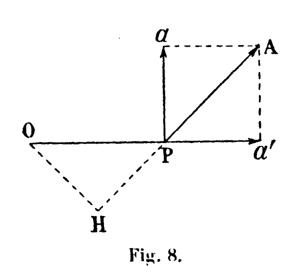


Fig. 8.

Ces deux moments sont perpendiculaires au plan OPA et situés d'un même côté de ce plan. Ils ont même sens. Il reste à montrer qu'ils ont même valeur absolue.

On voit immédiatement que les deux triangles OPA, OPa ont même base OP et même hauteur. Ils sont équivalents, ce qui établit la proposition indiquée.

Lemme II. — Soit PC la résultante de deux vecteurs PA, PB. Si l'on décompose chacun de ces trois vecteurs en deux autres, l'un dirigé suivant OP, l'autre normal à OP, les composantes normales à OP, P*a*, P*b*, P*c* satisfont à l'égalité géométrique

$$(Pc) = (Pa) + (Pb).$$

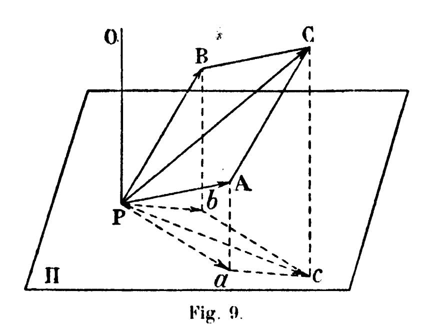


Fig. 9.

Menons par le point P le plan Π perpendiculaire à OP. Les points *a*, *b*, *c* sont respectivement les projections de A, B, C sur le plan Π. La figure PABC est un parallélogramme. Il en est de même de la figure P*abc*, ce qui démontre l'égalité.

Il résulte de là que pour établir l'égalité géométrique

$$(m'_O PC) = (m'_O PA) + (m'_O PB),$$

il suffit d'établir que

$$(m'_O Pc) = (m'_O Pa) + (m'_O Pb).$$

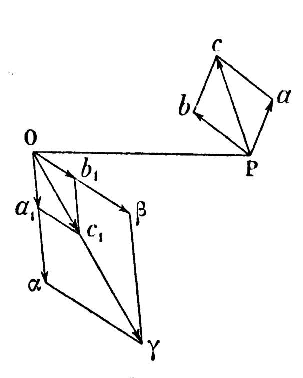


Fig. 10.

Soient Oα, Oβ, Oγ les moments de P*a*, P*b*, P*c* par rapport au point O. Prenons sur Oα, Oβ, Oγ des longueurs Oa_1, Ob_1, Oc_1, respectivement égales à P*a*, P*b*, P*c*. Si l'on faisait tourner la figure de $+\frac{\pi}{2}$ autour de OP, les vecteurs P*a*, P*b*, P*c* seraient équipollents aux vecteurs Oa_1, Ob_1, Oc_1. Les deux figures P*abc*, $Oa_1b_1c_1$ sont égales. Le quadrilatère $Oa_1b_1c_1$ est donc un parallélogramme.

Or on a

$$O\alpha = OP \,.\, Pa = OP \,.\, Oa_1,$$

De même,

$$O\beta = OP \,.\, Ob_1, \qquad O\gamma = OP \,.\, Oc_1.$$

On voit que le quadrilatère $O\alpha\beta\gamma$ est semblable au quadrilatère $Oa_1b_1c_1$. Ce quadrilatère est aussi un parallélogramme et par suite

$$(O\gamma) = (O\alpha) + (O\beta).$$

19. Cas d'un nombre quelconque de vecteurs. — Le théorème de Varignon a été établi dans le cas de deux vecteurs. Pour l'établir dans le cas d'un nombre quelconque de vecteurs, nous montrerons que s'il est vrai pour $(n - 1)$ vecteurs, il est encore vrai pour n vecteurs.

Soient $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$ n vecteurs, AQ la résultante des $(n - 1)$ premiers vecteurs, AR la résultante des n vecteurs.

On a, par hypothèse,

$$(\mathrm{m'}_O\, AQ) = (\mathrm{m'}_O\, AP_1) + \cdots + (\mathrm{m'}_O\, AP_{n-1}).$$

Mais
$$(AR) = (AQ) + (AP_n).$$

Donc
$$(\mathrm{m'}_O\, AR) = (\mathrm{m'}_O\, AQ) + (\mathrm{m'}_O\, AP_n).$$

Donc

$$(\mathrm{m'}_O AR) = (\mathrm{m'}_O AP_1) + (\mathrm{m'}_O AP_2) + \cdots + (\mathrm{m'}_O AP_{n-1}) + (\mathrm{m'}_O AP_n).$$

Le moment de la résultante de plusieurs vecteurs concourants par rapport à un point est la somme géométrique des moments par rapport à ce point des vecteurs composants.

20. Moments par rapport à un axe. — Soient $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$ n vecteurs concourants de résultante AR, D un axe passant par O. En appliquant le théorème des projections, on peut énoncer le résultat suivant :

Le moment de la résultante de plusieurs vecteurs concourants par rapport à un axe quelconque est la somme algébrique des moments par rapport à cet axe des vecteurs composants.

21. Calcul des moments d'un vecteur par rapport aux axes de coordonnées. — Soit MR un vecteur quelconque ; x, y, z les coordonnées de son point d'application M ; X, Y, Z les projections de MR sur les axes ; L, M, N les moments de ce vecteur par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Le vecteur MR peut être décomposé en trois vecteurs MA, MB,

MC portés par des droites parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, de mesures algébriques X, Y, Z.

On a $$(MR) = (MA) + (MB) + (MC)$$

et, par rapport à un axe quelconque,

$$m^t MR = m^t MA + m^t MB + m^t MC.$$

Prenons les moments par rapport à l'axe Ox.

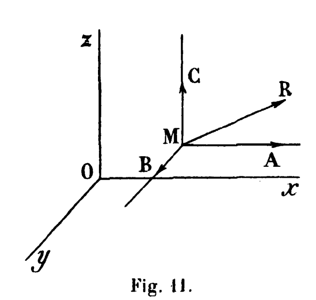


Fig. 11.

Le moment de MA est nul. Le moment de MB a même valeur absolue que le produit zY, car la longueur MB est égale à la valeur absolue de Y et la longueur de la perpendiculaire commune à MB et à Ox est égale à la valeur absolue de z. Si z et Y sont tous deux de même signe, le moment est négatif; si z, Y sont de signe contraire, le moment est positif. Dans tous les cas le moment de MB par rapport à Ox est $-zY$; on voit de même que le moment de MC par rapport à OX est yZ. On a donc

$$L = yZ - zY.$$

On trouve de même

$$M = zX - xZ,$$
$$N = xY - yX.$$

Systèmes de vecteurs.

22. Résultante générale d'un système de vecteurs. — Soient P_1, P_2,... P_n n vecteurs, O un point quelconque. Par le point O menons les vecteurs OR_1, OR_2,... OR_n équipollents aux vecteurs P_1, P_2,... P_n. La résultante OR des vecteurs OR_1, OR_2,... OR_n est la résultante générale du système de vecteurs.

En projetant sur un axe quelconque,

$$\text{pr. } OR = \text{pr. } OR_1 + \text{pr. } OR_2 + \ldots + \text{pr. } OR_n$$
$$= \text{pr. } P_1 + \text{pr. } P_2 + \ldots + \text{pr. } P_n.$$

La projection de la résultante générale d'un système de vecteurs sur un axe est égale à la somme des projections de tous les vecteurs du système sur le même axe.

On voit que si l'on remplace le point O par un point O′, la résultante générale obtenue O′R′ est un vecteur équipollent à OR.

23. Moment résultant par rapport à un point. — Soient OG_1, $OG_2, \ldots,$ OG_n les vecteurs qui représentent les moments des vecteurs P_1, $P_2, \ldots,$ P_n par rapport au point O. La résultante OG de ces vecteurs est le moment résultant du système de vecteurs par rapport au point O. On voit immédiatement que :

La projection du moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point O sur un axe passant par O est égale à la somme des moments des vecteurs du système par rapport à cet axe.

24. Variation du moment résultant du système par rapport à un point. — Théorème. — *Soient* OR *la résultante générale,* OG *le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point* O. *Le moment résultant* AH *de ce système par rapport à un point* A *est la somme géométrique de deux vecteurs, l'un* AG *est équipollent à* OG, *l'autre* AK *est le moment de* OR *par rapport à* A.

En effet, soient OR_1, $OR_2, \ldots$ OR_n les vecteurs équipollents aux vecteurs P_1, $P_2, \ldots$ P_n du système, OG_1, $OG_2, \ldots$ OG_n les moments de ces vecteurs par rapport au point O, AH_1, $AH_2, \ldots$ AH_n les moments des mêmes vecteurs par rapport à A. On a

$$(15)\qquad \begin{aligned} (AH_1) &= (OG_1) + (m'_A\, OR_1), \\ (AH_2) &= (OG_2) + (m'_A\, OR_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (AH_n) &= (OG_n) + (m'_A\, OR_n). \end{aligned}$$

En ajoutant,

$$\begin{aligned} (AH) &= (AH_1) + (AH_2) + \cdots + (AH_n) \\ &= (OG_1) + \cdots + (OG_n) + (m'_A\, OR_1) + \cdots + (m'_A\, OR_n) \\ &= (OG) + (m'_A\, OR), \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

25. Remarque I. — Il résulte de ce théorème que si l'on connaît la résultante générale et le moment résultant OG d'un système de vecteurs par rapport à un point O, on pourra obtenir le moment résultant relatif à un point quelconque.

26. Remarque II. — Si le point A est situé sur OR, le moment de OR par rappport à A est nul ; les vecteurs OG, AH sont équipollents.

27. Remarque III. — Si la résultante générale OR est nulle, les vecteurs OG, AH sont équipollents quels que soient O et A.

Cette remarque trouvera son application dans la théorie des couples.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

1. Soient Ox, Oy deux demi-droites formant entre elles l'angle θ, X, Y les composantes d'un vecteur OR suivant ces deux droites. Démontrer que

$$\overline{OR}^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos \theta.$$

Généraliser dans le cas de trois demi-droites Ox, Oy, Oz non situées dans un même plan, X, Y, Z étant les composantes d'un vecteur OR suivant ces trois droites.

2. Soient X, Y ; X_1, Y_1 les composantes de deux vecteurs OR, OR_1 suivant deux demi-droites Ox, Oy rectangulaires. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux vecteurs OR, OR_1 soient rectangulaires est que

$$XX_1 + YY_1 = 0.$$

Généraliser comme à l'exercice précédent pour le cas de trois droites.

3. Vérifier, en appliquant le résultat précédent, que le moment d'un vecteur AB par rapport à un point O est un vecteur orthogonal à AB.

4. Déterminer un vecteur situé dans un plan ABC connaissant ses moments par rapport aux points A, B, C.

5. Étant donnés trois points A, B, C, montrer que le système de vecteurs AB, BC, CA a même moment résultant en tous points de

l'espace. Interpréter géométriquement la grandeur de ce moment résultant.

6. Étant donné un triangle ABC, on considère les trois vecteurs ayant pour origine les milieux de chaque côté, dirigés à l'extérieur du triangle, perpendiculaires aux côtés, dont la grandeur est égale aux côtés correspondants. Montrer que la résultante générale et le moment résultant de ce système relativement à un point quelconque sont des vecteurs nuls.

7. On considère trois vecteurs OA, OB, OC dont les supports ne sont pas dans un même plan. Montrer que la résultante OR de ces vecteurs passe par le point de concours des médianes du triangle ABC.

8. Étant donné un système de vecteurs, montrer que le lieu des droites D passant par un point O telles que le moment du système par rapport à ces droites est nul est un plan.

9. Étant donné un système de vecteurs et un plan P, montrer que l'on peut en général déterminer un point O situé dans le plan P tel que le moment résultant OG du système relativement au point O soit perpendiculaire au plan P. Cas d'exception. Lieu de O quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

10. Étant donné un système de vecteurs, OG, O_1G_1 étant les moments résultants par rapport aux points O, O_1, comparer les projections de ces moments sur l'axe OO_1.

11. Trois vecteurs OG, O_1G_1, O_2G_2 quelconques peuvent-ils représenter les moments d'un système de vecteurs par rapport à trois points O, O_1, O_2? Dans l'affirmative, caractériser la résultante générale et le moment résultant du système.

CINÉMATIQUE

CHAPITRE II

CINÉMATIQUE. — GÉNÉRALITÉS

§ I.

Unités de longueur et de temps.

28. Cinématique. — Le géomètre n'étudie dans les corps que leur *forme* et leur *situation relative* ; s'il les déplace, il fait abstraction du temps pendant lequel s'effectue ce déplacement. En un mot, dans les mouvements qui s'effectuent en géométrie, on n'introduit pas la notion du *temps*.

Les grandeurs que l'on rencontre en géométrie sont de natures diverses : longueurs, angles, aires, volumes, angles dièdres, etc., etc... En principe, l'unité qui sert à mesurer chacune de ces grandeurs est arbitraire ; il n'y a pas, *a priori*, de *lien nécessaire* entre les diverses unités qui servent à mesurer ces grandeurs ; néanmoins, pour simplifier l'énoncé des théorèmes, on a fait des conventions qui relient ces diverses unités ; c'est ainsi, par exemple, qu'on choisit comme unité d'aire, l'aire du carré qui a pour côté l'unité de longueur, etc... ; de plus, on a été amené à choisir pour unité d'angle une *unité absolue ; l'angle unité est l'angle au centre qui intercepte un arc égal au rayon.* Ces conventions étant admises, il ne reste en géométrie qu'une seule unité fondamentale à fixer : l'*unité de longueur*.

Si maintenant, outre les propriétés qui tiennent à la forme et à la situation des corps, on fait intervenir celles qui résultent de leur déplacement, en tenant compte du temps pendant lequel s'effectue ce déplacement, on constitue une science qui, dans l'ordre de complexité, vient immédiatement après la géométrie : c'est la *cinématique*.

Si donc on tient compte des conventions faites en géométrie relativement au choix des unités, on voit que pour mesurer toutes les grandeurs qui se rencontrent en cinématique, il suffit de choisir *deux unités fondamentales* : l'unité de longueur et l'unité de temps.

La cinématique reposant sur les idées de temps et de mouvement, il importe de donner quelques explications sur chacune de ces notions. Nous nous occuperons d'abord de la notion de temps.

29. Notion de temps. — La notion de temps, comme toutes les idées premières des mathématiques, est une notion familière à tout le monde. Chacun conçoit dans tout phénomène, un *commencement*, une *durée*, une *fin* ; chacun comprend ce qu'il faut entendre par ces expressions : un phénomène commence *avant* ou *après* un autre ; un phénomène finit *au même instant* qu'un autre.

Nous allons indiquer comment on mesure théoriquement une *durée*. Les principes qui servent de base à la mesure d'une durée sont les mêmes que ceux qui servent de base à la mesure d'une grandeur quelconque. Pour mesurer une grandeur quelconque, il suffit qu'on ait défini, pour cette espèce de grandeur, ce qu'on entend par *grandeurs égales* et par *somme de deux grandeurs*. Il faut donc définir ce qu'on entend par *durées égales* et par *somme de deux durées*.

30. Durées égales. — *Si deux phénomènes commencent et finissent au même instant, la durée de ces phénomènes est la même.*

Si deux phénomènes, non simultanés, s'accomplissent dans des conditions identiques, les durées de ces phénomènes sont égales.

Ainsi, par exemple, si un pendule oscille toujours dans les

mêmes conditions (même température, même lieu d'oscillation, même angle d'écart, etc.), les durées de ces oscillations sont égales par définition. De même, si un liquide dans un vase est maintenu à un niveau constant et si l'on pratique une ouverture dans le vase, le temps nécessaire à l'écoulement d'une quantité donnée de liquide reste toujours le même, par définition.

31. Somme de deux durées. — *Si l'on considère deux phénomènes successifs, tels que le second commence à l'instant où le premier finit, la durée du phénomène composé des deux phénomènes considérés est, par définition, égale à la somme des durées de ces phénomènes.*

Une durée A est *plus grande* qu'une durée B si la durée A est égale à la somme de la durée B et d'une autre durée.

On définit de même une durée plus petite qu'une autre durée.

32. Mesure théorique du temps. — En faisant la somme de 2, 3, ..., n durées égales à une durée A, on obtient des durées qui sont dites 2, 3, ..., n fois plus grandes que la durée A.

Ainsi, par exemple, si la durée A est la durée d'une oscillation d'un pendule, la durée de 10 oscillations du même pendule sera 10 fois plus grande que la durée A. Si la durée A est la durée de l'écoulement d'un litre de liquide d'un vase maintenu à un niveau constant, la durée de l'écoulement de 10 litres de liquide est 10 fois plus grande que la durée A.

Une durée B est n fois plus petite qu'une durée A si A est n fois plus grand que B, c'est-à-dire si A est égal à la somme de n durées égales à B. Ainsi, par exemple, si nous considérons toujours un liquide qui s'écoule d'un vase maintenu à un niveau constant et si la durée A est celle qui correspond à l'écoulement d'un litre, la durée B, dix fois plus petite, est celle qui correspond à l'écoulement d'un décilitre.

Cela posé, soient A une durée quelconque, U la durée unité.

Si A est m fois plus grand que U, la mesure de A est le nombre entier m.

Si A est m fois plus grand qu'une durée u, n fois plus petite elle-même que U, la mesure de A est la fraction $\frac{m}{n}$.

Dans les deux cas que nous venons d'examiner, il existe une durée qui est à la fois partie aliquote de A et de U. Cette partie aliquote est une *commune mesure* entre A et U. On dit encore que les durées A et U sont *commensurables*. Quand il en est ainsi, la mesure de A est un nombre fractionnaire.

S'il n'existe pas de commune mesure entre A et U, on dit que les durées A et U sont *incommensurables*. Il faut définir, dans ce cas, ce qu'on entend par *mesure approchée* de A.

Soit u une durée n fois plus petite que l'unité U; A sera compris entre deux multiples consécutifs de u, il sera, par exemple, plus grand que m fois u et plus petit que $(m+1)$ fois u. On dit alors que $\frac{m}{n}$ est la *mesure approchée* de A à $\frac{1}{n}$ *près* par *défaut* et $\frac{m+1}{n}$ la mesure de A à $\frac{1}{n}$ *près* par *excès*.

33. Remarque. — Dans la pratique, deux phénomènes ne s'accomplissent jamais dans des conditions absolument identiques. Ainsi, si l'on fait osciller un même pendule et si l'on compare deux oscillations de ce pendule, il peut se faire que pendant la seconde oscillation la longueur du pendule, l'angle d'écart, la résistance de l'air, etc.., ne soient pas rigoureusement les mêmes que pendant la première oscillation. Cette remarque n'affecte en rien l'idée de mesure théorique du temps. Au point de vue pratique, il faut en tenir compte et se placer dans des conditions telles que les changements qui peuvent se produire n'affectent pas d'une manière sensible la durée du phénomène.

Ainsi dans la pratique, pour mesurer le temps, on produira un phénomène se renouvelant constamment, c'est-à-dire qu'à l'instant même où le premier phénomène finit, un second commence, et ainsi de suite, en se plaçant dans des conditions telles que les variations accessoires qui peuvent se produire soient sans influence appréciable sur la durée du phénomène.

34. Unités adoptées. — Nous avons vu (28) qu'il y a deux unités fondamentales en cinématique : l'unité de longueur et l'unité de temps. Ces unités peuvent être choisies arbitrairement; toutes les formules de la cinématique subsistent quelles que

soient les unités choisies. Dans la pratique, on fait usage de deux systèmes d'unités. Dans le premier système l'unité de longueur est le *mètre* ; dans le second, qui est appelé le système C. G. S., l'unité de longueur est le *centimètre*.

Dans l'un et l'autre système, l'unité de temps est la *seconde de temps solaire moyen*, c'est-à-dire une durée 86 400 fois plus petite que le jour solaire moyen.

(Pour la définition du jour solaire moyen, voir *Traité de Cosmographie* de Grignon.)

35. Fixation d'un instant. — Pour fixer un instant A, on choisit un instant *origine* B ; l'instant A sera fixé sans ambiguïté si l'on se donne un nombre algébrique ayant pour valeur absolue le nombre qui mesure la durée comprise entre les instants A et B ; ce nombre sera positif si l'instant A est postérieur à l'instant B, négatif dans le cas contraire.

Cette manière de fixer un instant par un nombre est tout à fait analogue à la détermination d'un point d'une droite par son abscisse.

Si l'on prend pour unité de temps la seconde, le nombre qui fixe l'instant A a pour valeur absolue le nombre de secondes écoulées entre les instants A et B. Dans l'usage courant, au lieu de compter par secondes, on compte par années, mois, jours, heures, minutes et secondes. Ainsi, on définit d'une façon précise un instant par *sa date* ; par exemple, un instant est défini d'une façon précise si l'on dit qu'il correspond au 28 décembre 1902, 8 heures, 40 minutes, 16 secondes du matin (temps moyen de Paris).

(La théorie complète des systèmes d'unités est traitée dans la dynamique du point matériel (Chap. I).

§ II.

Mouvement.

36. Point matériel. — Les données de la physique nous conduisent à admettre que les corps matériels sont formés d'un très grand nombre de particules indivisibles appelées *molécules*.

Les dimensions de ces molécules sont assez petites pour qu'elles puissent, sans erreur sensible, être assimilées à des points géométriques ; c'est pourquoi on leur donne le nom de *points matériels*.

Tout corps matériel peut donc être considéré comme formé de points matériels ; c'est pourquoi un corps est appelé en mécanique un *système de points matériels*.

37. Corps solide ou système invariable. — Un système de points matériels forme un *corps solide* ou un *système invariable* si les distances mutuelles des points du système restent invariables ; il en résulte que si A, B, C sont trois points du corps solide, dans le triangle ABC les longueurs des côtés restent fixes ; par suite il en est de même des angles ; on voit de même que si ABCD est un tétraèdre du corps solide, le dièdre C AB D reste fixe.

Un système de points matériels qui n'est pas un système solide forme ce qu'on appelle un *système déformable*.

Bien qu'il n'existe pas dans la nature de corps absolument solides, on peut dire que les corps appelés communément solides tels qu'une pierre, un métal, un morceau de bois forment à peu près des systèmes invariables.

Au contraire, un ressort, un fil, un liquide, un gaz donnent des exemples de corps déformables.

38. Repos et mouvement. — Un point est dit *en repos par rapport à un corps solide*, lorsque les distances de ce point à chacun des points du corps solide restent invariables.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si la distance du point à l'un des points du solide change, le point est *en mouvement* par rapport au corps solide.

Un système de points est *en repos par rapport à un corps solide* si tous les points du système sont en repos par rapport à ce corps solide ; dans le cas contraire, le système est *en mouvement par rapport au corps solide*.

On voit que les notions de repos et de mouvement sont essentiellement relatives ; quand on parle du repos ou du mouvement d'un corps, il faut, pour être précis, indiquer quel est le corps

solide auquel on rapporte le mouvement ; d'ailleurs un corps peut être en repos par rapport à un corps solide et en mouvement par rapport à un autre.

Ainsi, un homme assis dans une voiture peut être en repos par rapport à la voiture ; si la voiture est en marche, cet homme sera en mouvement par rapport à la route, aux maisons, etc., etc.

Imaginons encore un bateau qui se déplace sur un lac ; ce bateau est mobile par rapport à la terre, puisque la distance des divers points du bateau aux divers points de la berge varie. Inversement, un point de la berge, un arbre par exemple, est aussi mobile par rapport au bateau, car la distance d'un point de l'arbre à un point du bateau change. Si maintenant on fait rouler une bille sur le pont du bateau, cette bille est en mouvement par rapport au bateau, et, en général aussi, par rapport à la berge ; mais ces deux mouvements sont bien distincts.

Le corps solide auquel on rapporte le repos ou le mouvement que l'on considère s'appelle aussi le *système de comparaison*.

39. Trajectoire d'un point. — Considérons un point en mouvement par rapport à un corps ; le point en mouvement s'appelle aussi un *point mobile*, le lieu des positions du point mobile par rapport au système de comparaison est une courbe qu'on appelle la *trajectoire* du mobile.

Soit alors T (*fig.* 12) la trajectoire du mobile; prenons sur cette trajectoire une origine arbitraire A. En partant de A on peut se déplacer sur la courbe dans deux sens ; prenons l'un d'eux comme sens positif. Soit alors M un point quelconque de la trajectoire ; le point M sera déterminé sans ambiguïté si l'on se donne un nombre algébrique s ayant pour valeur absolue l'arc AM et pour signe le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le chemin AM est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif.

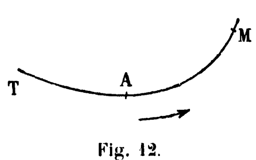


Fig. 12.

Si s est donné, le point M est déterminé ; mais le contraire n'est pas toujours exact ; si la courbe est fermée, on peut faire

correspondre au point M une infinité de valeurs de s. (Ex. : les arcs en trigonométrie.)

Pour définir le mouvement du mobile, il faut pouvoir fixer sa position à chaque instant t, c'est-à-dire connaître, pour chaque instant t, la valeur correspondante de s ; pour définir le mouvement, il faut donc connaître *s en fonction de t.*

Si la trajectoire est une droite, le mouvement est dit *rectiligne* ; dans le cas contraire, le mouvement est *curviligne.*

40. Exemple. — Supposons que la roue d'une voiture roule sur une voie droite; par rapport à la voiture le centre de la roue est fixe ; par rapport à la voie, ce centre décrit une droite parallèle à la voie ; un point de la roue, point qu'on peut suivre plus facilement en le supposant marqué à la craie, décrit par rapport à la voiture une circonférence qui a pour centre le centre de la roue ; par rapport à la voie, il décrit une courbe qu'on appelle cycloïde.

41. Division de la cinématique. — La cinématique se décompose en trois parties :

1° L'étude du mouvement d'un point, c'est la *cinématique du point* ;

2° L'étude des mouvements des systèmes de points, c'est la *cinématique des systèmes.* Nous nous limiterons au cas où le système mobile est un système invariable ;

3° La *composition des mouvements* ou la théorie du *changement de système de comparaison.*

Cette théorie peut se ramener à celle du problème suivant :

On donne le mouvement d'un point M *par rapport à un corps solide* B *et le mouvement du corps solide* B *par rapport à un corps solide* A ; *trouver le mouvement du point* M *par rapport au corps solide* A.

CHAPITRE III

CINÉMATIQUE DU POINT

---

§ I.

Mouvement rectiligne.

42. Mouvement rectiligne uniforme. — Un mouvement rectiligne est *uniforme* lorsque les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.

Soit alors $x'x$ (*fig.* 13) la trajectoire du mobile; fixons sur

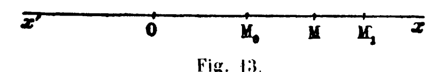


Fig. 13.

cette droite un sens positif et prenons sur la droite $x'x$ une origine O. A l'instant initial, que nous prenons comme origine du temps, le mobile est en un point M_0 dont l'abscisse est x_0 ; à l'instant t le mobile sera en un point M dont l'abscisse est x. L'espace parcouru M_0M, pendant le temps t, a pour valeur absolue $x - x_0$; donc par définition la valeur absolue du rapport

$$\frac{x - x_0}{t}$$

est constante.

Supposons que le mobile se meut dans le sens positif, $x - x_0$ et t sont de même signe, ce rapport est positif.

Si le mobile se meut dans le sens négatif, $x - x_0$ et t sont de signes contraires, le rapport est négatif.

On a donc

$$\frac{x - x_0}{t} = v,$$

ou

$$x = x_0 + vt,$$

v étant un nombre algébrique positif si le mobile se meut dans le sens positif, et négatif si le mobile se meut dans le sens négatif.

On voit que x s'exprime en fonction de t par un polynome du premier degré en t.

Réciproquement, si un mouvement rectiligne est défini par l'équation

$$x = a + vt,$$

le mouvement est uniforme. En effet, soient M la position du mobile à l'instant t, M_1 sa position à l'instant t_1, x et x_1 les abscisses des points M et M_1 ; on aura

$$x = a + bt,$$
$$x_1 = a + bt_1,$$

et par suite

$$MM_1 = x_1 - x = bt_1 - bt,$$

donc

$$\frac{MM_1}{t_1 - t} = b;$$

par conséquent le rapport entre le chemin parcouru MM_1 et le temps $t_1 - t$ employé à le parcourir a une valeur constante b ; donc le mouvement est uniforme.

43. Vitesse dans un mouvement rectiligne uniforme. — Soit un mouvement rectiligne uniforme défini par l'équation

$$x = a + bt;$$

la valeur algébrique de l'espace parcouru pendant un temps égal à l'unité est b. Ce nombre b est la valeur algébrique de la vitesse ; donc :

Dans un mouvement rectiligne uniforme la valeur algébrique de la vitesse est égale à la valeur algébrique du chemin parcouru pendant un temps égal à l'unité.

Le nombre b est aussi égal (42) au rapport $\frac{MM_1}{t_1 - t}$; on peut encore dire :

La vitesse est égale au quotient par h de la valeur algébrique de l'espace parcouru pendant le temps h.

On représente aussi la vitesse par un vecteur. Soient M la position du mobile à l'instant t, MV un vecteur porté sur la tra-

jectoire et ayant une mesure algébrique égale à la vitesse ; ce vecteur MV est le vecteur qui représente la vitesse à l'instant t.

44. Mouvement rectiligne varié. — Soit $x'x$ la trajectoire du mobile ; fixons un sens positif sur cette trajectoire et prenons sur la droite $x'x$ une origine O (*fig.* 14) ; soit M la position du

x' O M M_1 V x

Fig. 14.

mobile à l'instant t ; l'abscisse x du point M est une fonction du temps

$$x = f(t);$$

cette fonction $f(t)$ est la fonction qui définit le mouvement.

A l'instant $t+h$ le mobile sera en M_1 ; imaginons un mobile animé d'un mouvement uniforme, partant de M à l'instant t, arrivant en M_1 à l'instant $t+h$; la vitesse de ce mobile aura pour valeur algébrique $\frac{MM_1}{h}$. Ce rapport $\frac{MM_1}{h}$ est la *vitesse moyenne du mobile pendant le temps h qui suit l'instant t*. La limite de ce rapport quand h tend vers zéro est la *vitesse du mobile à l'instant t*. Il est facile de calculer cette vitesse. On a en effet

$$OM = f(t), \qquad OM_1 = f(t+h),$$

d'où

$$MM_1 = f(t+h) - f(t),$$

et par suite

$$\frac{MM_1}{h} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

ce qui donne l'expression de la vitesse moyenne ; si h tend vers zéro, cette expression a pour limite $f'(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$.

Donc :

Si l'équation du mouvement varié est $x = f(t)$, *la valeur algébrique de la vitesse à l'instant* t est $f'(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$.

On représente aussi cette vitesse par un vecteur MV porté sur la trajectoire $x'x$, ayant pour origine M la position du mobile à l'instant t et pour mesure algébrique un nombre égal à la valeur algébrique de la vitesse.

Si l'on applique la règle précédente au cas où l'équation du mouvement est

$$x = a + bt,$$

on trouve

$$v = b,$$

ce qui est conforme à la définition de la vitesse dans le mouvement uniforme (43).

45. *Si dans un mouvement rectiligne la vitesse est constante, le mouvement est uniforme.*

En effet, si la vitesse est égale à b, on aura

$$\frac{dx}{dt} = b,$$

et par suite, en remontant à la primitive,

$$x = a + bt,$$

ce qui est l'équation d'un mouvement uniforme.

46. Accélération. — Soient $x'x$ (*fig.* 15) la trajectoire du

x' O M M_1 γ x

Fig. 15.

mobile, M la position du mobile à l'instant t ; l'abscisse x du point M est une fonction du temps,

$$x = f(t).$$

Cela posé, désignons par v la vitesse du mobile à l'instant t, par v_1 sa vitesse à l'instant $t+h$; $v_1 - v$ est l'accroissement de la vitesse pendant le temps h qui suit l'instant t. Le quotient $\frac{v_1 - v}{h}$ est l'*accélération moyenne du mobile pendant le temps* h *qui suit l'instant* t. La limite de ce rapport, quand h tend vers zéro, est l'*accélération du mobile à l'instant* t.

Il est facile de calculer cette limite. On a, en effet (44),

$$v = f'(t), \qquad v_1 = f'(t+h),$$

d'où

$$\frac{v_1 - v}{h} = \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h}.$$

Si h tend vers zéro, cette expression a pour limite la dérivée de $f'(t)$, c'est-à-dire $f''(t)$, ou $\frac{d^2x}{dt^2}$, ou encore $\frac{dv}{dt}$. Donc : *Si l'équation du mouvement est* $x = f(t)$, *la valeur algébrique de l'accélération à l'instant* t *est* $f''(t)$ *ou* $\frac{d^2x}{dt^2}$.

On représente aussi cette accélération par un vecteur $M\gamma$ porté sur la trajectoire $x'x$, ayant pour origine M la position du mobile à l'instant t et pour mesure algébrique un nombre égal à la valeur algébrique de l'accélération.

47. Autre expression de l'accélération. — Quand on connaît un mouvement rectiligne, l'abscisse et par suite la vitesse sont des fonctions connues du temps ; au lieu d'exprimer la vitesse en fonction du temps, on peut l'exprimer en fonction de l'abscisse ; v et son carré v^2 sont donc des fonctions de x ; calculons la dérivée de cette dernière fonction ; on a

$$\frac{d(v^2)}{dx} = 2v\frac{dv}{dx};$$

mais
$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt} \times \frac{1}{v};$$

donc
$$\frac{d(v^2)}{dx} = 2v\frac{dv}{dt} \times \frac{1}{v} = 2\frac{dv}{dt} = 2\gamma.$$

Par conséquent :

Dans un mouvement rectiligne l'accélération est égale à la moitié de la dérivée du carré de la vitesse prise par rapport à l'abscisse.

§ II.

Mouvement curviligne.

48. Vitesse. — Soient M la position du mobile à l'instant t, M_1 sa position à l'instant $t+h$ (*fig.* 16). Imaginons un mobile, animé d'un mouvement rectiligne uniforme, partant de M à l'instant t et arrivant en M_1 à l'iustant $t+h$; la vitesse de ce second mobile sera représentée par un vecteur MU porté sur la

droite MM_1 et ayant pour grandeur $\frac{MM_1}{h}$. Ce vecteur MU est la *vitesse moyenne du mobile pendant le temps h qui suit l'instant t.*

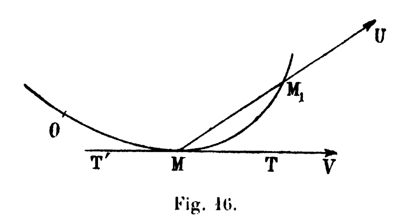


Fig. 16.

Lorsque h tend vers zéro, le vecteur MU a pour position limite un vecteur MV, que l'on appelle la *vitesse du mobile à l'instant t.* Nous allons chercher cette position limite MV.

Quand h tend vers zéro, M_1 se rapproche indéfiniment du point M et la droite MM_1 a pour position limite la tangente en M à la trajectoire ; sur cette tangente on peut prendre deux demi-droites MT, MT' ; MU prendra la direction MT ou MT' suivant que M_1 est par rapport au point M du côté MT ou du côté MT', c'est-à-dire suivant qu'à partir de la position M le mobile se meut dans le sens MT ou dans le sens MT'.

Il reste à trouver la grandeur du vecteur MV.

Or on a

$$MU = \frac{\text{corde } MM_1}{h} = \frac{\text{corde } MM_1}{\text{arc } MM_1} \times \frac{\text{arc } MM_1}{h}.$$

Or, dans une courbe quelconque, le rapport de la corde à l'arc tend vers l'unité quand l'arc tend vers zéro ; le rapport $\frac{\text{corde } MM_1}{\text{arc } MM_1}$ ayant pour limite l'unité, la grandeur de MV est la limite de

$$\frac{\text{arc } MM_1}{h}$$

quand h tend vers zéro.

Prenons sur la trajectoire une origine O et fixons un sens positif sur cette trajectoire ; on peut définir le mouvement en se donnant l'arc OM en fonction de t :

$$\text{arc } OM = s = f(t) ;$$

on aura par conséquent

$$\text{arc } OM_1 = f(t + h) ;$$

donc la valeur absolue de l'arc MM_1 est la même que celle de l'expression

$$f(t+h)-f(t)$$

et par conséquent

$$\frac{\text{arc } MM_1}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

ont même valeur absolue. Cette dernière expression a pour limite $f'(t)$ ou $\frac{ds}{dt}$; la mesure de la vitesse est donc égale à la valeur absolue de $\frac{ds}{dt}$.

En résumé, la vitesse à l'instant t est représentée par un vecteur ayant pour origine la position M du mobile à l'instant t, dirigé suivant la tangente et dans le sens du mouvement, ayant pour grandeur la valeur absolue de $\frac{ds}{dt}$.

49. Remarque. — Sur la tangente en M à la trajectoire on peut prendre à partir de M deux demi-droites MT, MT' ; désignons par MT celle qui est dirigée dans le sens des arcs croissants.

Si le mobile se meut à partir de M dans le sens des arcs croissants, la vitesse est dirigée suivant MT, et s croissant, $\frac{ds}{dt}$ est positif ; si, au contraire, le mobile se meut, à partir de M, dans le sens des arcs décroissants, la vitesse est dirigée suivant MT', et comme s décroît, $\frac{ds}{dt}$ est négatif.

Il résulte de là que si sur la tangente en M à la trajectoire on prend comme sens positif le sens MT des arcs croissants, la mesure algébrique du vecteur qui représente la vitesse est toujours égale à $\frac{ds}{dt}$.

50. Mouvement uniforme sur une courbe. — On dit qu'un mouvement curviligne est uniforme lorsque les arcs décrits par le mobile sont proportionnels aux temps employés à les parcourir. L'équation du mouvement est alors

$$s = at + b\,;$$

on en déduit $$v = \frac{ds}{dt} = a\,;$$

donc :

Dans un mouvement curviligne uniforme la grandeur de la vitesse est constante.

On démontre comme au n° 45 que :

Réciproquement, si dans un mouvement curviligne la grandeur de la vitesse reste constante, le mouvement est uniforme.

51. Remarque. — Soit M (*fig.* 17) un point mobile qui décrit une trajectoire C ; faisons une projection orthogonale ou oblique

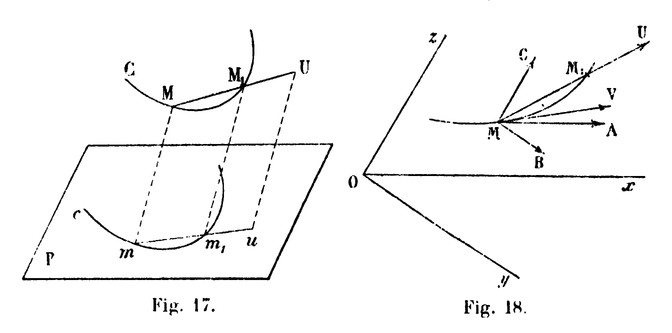


Fig. 17. Fig. 18.

sur un plan P ; la projection m du point M décrit une trajectoire c ; à l'instant $t+h$ le mobile M vient en M_1 et m en m_1 ; marquons les vecteurs MU et mu qui représentent les vitesses moyennes de M et m : on a

$$MU = \frac{MM_1}{h}, \qquad mu = \frac{mm_1}{h}.$$

mm_1 étant la projection de MM_1, mu sera à cause des relations précédentes la projection de MU. En faisant tendre h vers zéro, on voit que la vitesse de m est la projection de la vitesse de M ; donc :

Si on projette (orthogonalement ou obliquement) *un mobile sur un plan, la vitesse de la projection du mobile est égale à la projection de la vitesse du mobile.*

On arrivera, par une démonstration analogue à la précédente, au même énoncé en projetant, parallèlement à un plan, un mobile sur une droite.

52. Projections de la vitesse sur les axes de coordonnées. — On peut encore définir le mouvement d'un point M (*fig.* 18) en donnant les valeurs des trois coordonnées de ce point en fonction du temps ; supposons donc le mouvement défini par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

A l'instant $t + h$ le mobile sera en M_1 ; les coordonnées de M_1 sont

$$f(t+h), \qquad \varphi(t+h), \qquad \psi(t+h),$$

et par conséquent les projections du vecteur MM_1 sur les axes (la projection sur chaque axe étant faite parallèlement au plan des deux autres) sont

$$f(t+h) - f(t), \qquad \varphi(t+h) - \varphi(t), \qquad \psi(t+h) - \psi(t),$$

et celles du vecteur MU, qui est égal à $\frac{MM_1}{h}$, sont

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \qquad \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \qquad \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h}.$$

Quand h tend vers zéro, ces expressions ont pour valeurs limites

$$f'(t), \qquad \varphi'(t), \qquad \psi'(t) ;$$

ce sont les projections des vecteurs vitesses MV sur les axes ; donc :

Si le mouvement est défini par les équations $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, *les projections de la vitesse sur les axes* x, y, z *sont* $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ *ou encore* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

53. Remarque. — On peut encore énoncer le résultat précédent ainsi : Le vecteur MV qui représente la vitesse du point M est la somme géométrique de trois vecteurs MA, MB, MC (*fig.* 18) respectivement parallèles aux axes x, y, z et ayant pour valeurs algébriques $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ou encore $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Supposons que les axes de coordonnées soient les arêtes d'un trièdre trirectangle ; le carré de MV est égal à la somme des carrés de ses trois composantes (6). On a donc

$$\overline{MV}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2.$$

En désignant par v la grandeur de la vitesse, on aura

$$(1)\quad v^2 = f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

En prenant les dérivées des deux membres de la formule (1), il vient

$$(2)\qquad v\frac{dv}{dt} = f'(t)f''(t) + \varphi'(t)\varphi''(t) + \psi'(t)\psi''(t).$$

On peut aussi en déduire les cosinus des angles que forme la direction MV avec les axes Ox, Oy, Oz. En effet, la projection orthogonale de MV sur l'axe des x est d'une part égale à $\frac{dx}{dt}$, d'autre part elle est égale à $v \times \cos(Ox, \text{MV})$, donc

$$\cos(Ox, \text{MV}) = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{v}f'(t).$$

On trouve de même

$$\cos(Oy, \text{MV}) = \frac{1}{v}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{v}\varphi'(t),$$

$$\cos(Oz, \text{MV}) = \frac{1}{v}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{v}\psi'(t).$$

54. Projection de la vitesse sur une direction quelconque. — Le vecteur MV (*fig.* 18) étant la somme géométrique des trois vecteurs MA, MB, MC, la projection de MV sur un axe quelconque D est la somme des projections des vecteurs MA, MB, MC sur le même axe. Or,

$$\text{pr. MA} = \frac{dx}{dt} \times \cos(Ox, \text{D}),$$

$$\text{pr. MB} = \frac{dy}{dt} \times \cos(Oy, \text{D}),$$

$$\text{pr. MC} = \frac{dz}{dt} \times \cos(Oz, \text{D});$$

donc on a

$$\text{pr. MV} = \frac{dx}{dt}\cos(Ox, \text{D}) + \frac{dy}{dt}\cos(Oy, \text{D}) + \frac{dz}{dt}\cos(Oz, \text{D}).$$

55. Application. — *Projections de la vitesse sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire au rayon vecteur.* — Soit M un mobile qui décrit une courbe plane rapportée à deux axes rec-

tangulaires Ox, Oy (*fig.* 19); la demi-droite OL qui joint l'origine au point mobile est le *rayon vecteur* de ce point; menons ensuite la demi-droite ON perpendiculaire à OL et dirigée dans un sens tel que les deux angles xOy et LON aient le même sens. Nous allons chercher les projections de la vitesse du point M sur les directions OL et ON; si l'on désigne ces projections par V_{OL} et par V_{ON}, on a (54)

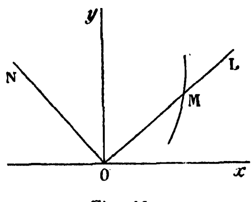


Fig. 19.

$$V_{OL} = \frac{dx}{dt} \times \cos(Ox, OL) + \frac{dy}{dt} \times \cos(Oy, OL),$$

$$V_{ON} = \frac{dx}{dt} \times \cos(Ox, ON) + \frac{dy}{dt} \times \cos(Oy, ON).$$

Désignons par ρ la longueur OM et par θ l'angle xOL; on aura

$$\cos(Ox, OL) = \cos\theta, \qquad \cos(Oy, OL) = \sin\theta,$$
$$\cos(Ox, ON) = -\sin\theta, \qquad \cos(Oy, ON) = \cos\theta,$$

donc

$$V_{OL} = \cos\theta \frac{dx}{dt} + \sin\theta \frac{dy}{dt},$$

$$V_{ON} = -\sin\theta \frac{dx}{dt} + \cos\theta \frac{dy}{dt};$$

mais on a $\qquad x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$

d'où l'on déduit, en prenant les dérivées,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\theta + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

En portant ces valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et de $\frac{dy}{dt}$ dans les expressions de V_{OL} et de V_{ON}, on trouve

$$V_{OL} = \frac{d\rho}{dt}, \qquad V_{ON} = \rho\frac{d\theta}{dt}.$$

On peut encore dire : la vitesse du point M est la somme géométrique de deux vecteurs, l'un parallèle à OL ayant pour

valeur algébrique $\frac{d\rho}{dt}$, l'autre parallèle à ON ayant pour valeur algébrique $\rho \frac{d\theta}{dt}$.

Les deux composantes de la vitesse du point M étant rectangulaires, on a

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

56. Hodographe. — Soient M un point mobile (*fig.* 20), MV le vecteur qui représente sa vitesse à l'instant t; par un point fixe O menons un vecteur Om équipollent à MV; quand t varie, le point m décrit une courbe qu'on appelle *hodographe* du mouvement du point M.

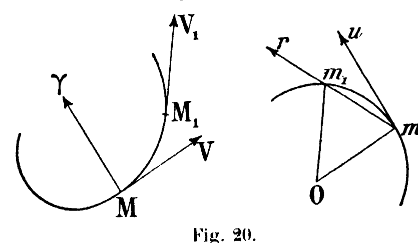


Fig. 20.

57. Accélération. — L'*accélération* du point mobile M est, par définition, le vecteur Mγ d'origine M équipollent à la vitesse mu du point m qui décrit l'hodographe du mouvement du point M (*fig.* 20).

58. Dérivée géométrique. — Considérons un vecteur variable avec le temps; soient A ce vecteur à l'instant t, B à l'instant $t+h$; O étant un point fixe quelconque, formons un vecteur OU égal à la différence (B) — (A), puis sur OU portons une longueur OH égale à $\frac{OU}{h}$: la position limite OK du vecteur OH est la *dérivée géométrique* du vecteur A à l'instant t (*fig.* 21). Si l'on change l'origine O, la grandeur géométrique de OU ne change pas; il en est de même de sa limite OK.

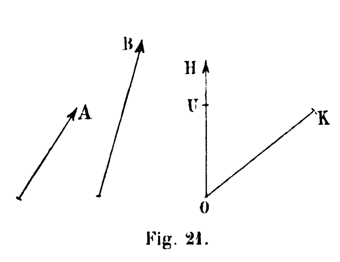


Fig. 21.

59. Théorème. — *L'accélération est égale à la dérivée géométrique de la vitesse.*

En effet, soient M_1 (*fig.* 20) la position du mobile à l'instant $t+h$, M_1V_1 la vitesse à cet instant; il y correspond sur l'hodographe un point m_1. La vitesse mu du point m est la limite du vecteur mr porté sur mm_1 et égal à $\frac{mm_1}{h}$; or

$$mm_1 = (om_1) - (om) = (M_1V_1) - (MV).$$

Le vecteur mu est donc le vecteur obtenu quand on cherche la dérivée géométrique du vecteur MV en prenant comme origine le point m, ce qui démontre le théorème.

60. Mouvement rectiligne. — Soit M un mobile (*fig.* 22) dont la trajectoire est l'axe Ox et dont la vitesse à l'instant t est représentée par le vecteur MV. Pour construire l'hodographe de ce mouvement, je prends une origine arbitraire O′ et je mène le vecteur $O'm$ équipollent au vecteur MV; le vecteur MV étant constamment porté sur la droite Ox, le point m se trouve sur la droite $O'x'$ menée par O′ parallèlement à la droite Ox.

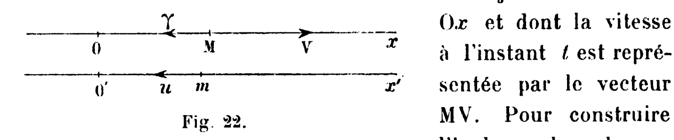


Fig. 22.

Sur la droite $O'x'$ prenons comme origine le point O′, et fixons le sens positif de $O'x'$ de telle sorte qu'il ait le même sens que sur Ox; soit alors

$$x = f(t)$$

l'équation du mouvement du point M; l'abscisse du point m étant égale à la vitesse de M aura pour valeur

$$x' = f'(t),$$

et par conséquent la vitesse mu du point m est égale à

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dv}{dt} = f''(t), \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Donc l'accélération $M\gamma$ du point M est un vecteur qui a pour origine M et pour mesure algébrique $f''(t)$ ou $\frac{d^2x}{dt^2}$.

On voit que dans un mouvement rectiligne la définition de l'accélération par l'hodographe conduit au même résultat que celle du n° 46.

61. Théorème. — *Si on projette* (orthogonalement ou obliquement) *un mobile sur un plan, l'accélération de la projection du mobile est égale à la projection de l'accélération du mobile.*

Soit M' la projection du mobile M (*fig.* 23); la vitesse M'V' de

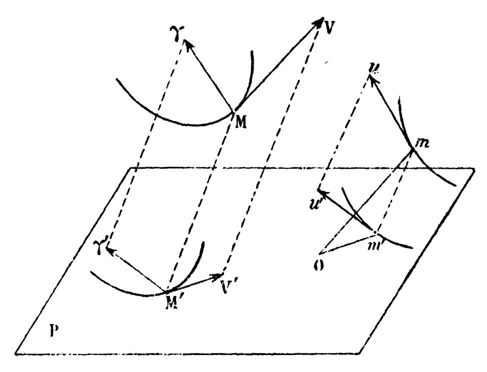


Fig. 23.

M' est la projection de la vitesse MV de M (51); prenons alors une origine arbitraire O dans le plan de projection P et construisons les vecteurs O*m*, O*m'* qui sont respectivement équipollents aux vecteurs MV, M'V'; *m'* sera la projection de *m* sur le plan P; mais les points *m* et *m'* décrivent respectivement les hodographes des mouvements des points M et M', et par conséquent les accélérations Mγ et M'γ' des points M et M' ont respectivement même grandeur géométrique que les vitesses *mu*, *m'u'* des points *m* et *m'*; *m'u'* étant égal (51) à la projection de *mu*, M'γ' sera égal à la projection de Mγ.

On démontre de même le résultat suivant :

Si on projette, parallèlement à un plan, *un mobile sur une droite, l'accélération de la projection du mobile est égale à la projection de l'accélération du mobile.*

62. Projection de l'accélération sur les axes de coordonnées.

— Définissons comme au n° 52 le mouvement par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Menons par l'origine O le vecteur Om (*fig.* 24) équipollent à la vitesse MV du point M; les coordonnées ξ, η, ζ du point m sont (52)

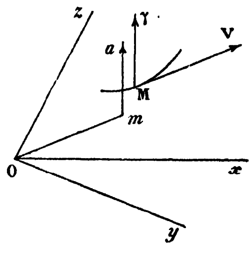


Fig. 24.

$$\xi = f'(t), \qquad \eta = \varphi'(t), \qquad \zeta = \psi'(t).$$

Les projections de la vitesse du point m sur les axes sont (52)

$$\frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt}, \qquad \frac{d\zeta}{dt},$$

ou $\quad f''(t), \qquad \varphi''(t), \qquad \psi''(t).$

L'accélération de M étant équipollente à la vitesse de m, on voit que les projections de l'accélération sur les axes sont $f''(t)$, $\varphi''(t)$, $\psi''(t)$, ou encore

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

63. Projection de l'accélération sur une direction quelconque. — En raisonnant comme au n° 54, on trouve que la projection de l'accélération sur une direction D est égale à

$$f''(t) \times \cos(Ox, D) + \varphi''(t) \times \cos(Oy, D) + \psi''(t) \times \cos(Oz, D),$$

ou à

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos(Ox, D) + \frac{d^2y}{dt^2}\cos(Oy, D) + \frac{d^2z}{dt^2}\cos(Oz, D).$$

64. Projection de l'accélération sur la vitesse. — Nous allons chercher la projection de Mγ sur la direction MV (*fig.* 24). Cette projection est égale (63) à

$$f''(t)\cos(Ox, MV) + \varphi''(t)\cos(Oy, MV) + \psi''(t)\cos(Oz, MV).$$

Or, en supposant les axes rectangulaires, on a (53)

$$\cos(Ox, MV) = \frac{1}{v} f'(t), \qquad \cos(Oy, MV) = \frac{1}{v}\varphi'(t),$$

$$\cos(Oz, MV) = \frac{1}{v}\psi'(t);$$

donc la projection a pour valeur

$$\frac{1}{v}[f'(t)f''(t)+\varphi'(t)\varphi''(t)+\psi'(t)\psi''(t)],$$

ou, en tenant compte de la formule 2, n° 53, cette projection est $\frac{dv}{dt}$; donc:

La projection de l'accélération sur la vitesse est égale à $\frac{dv}{dt}$.

On en déduit les résultats suivants:

Si l'accélération fait un angle aigu avec la vitesse, la grandeur de la vitesse croît;

Si l'accélération fait un angle obtus avec la vitesse, la grandeur de la vitesse décroît.

§ III.

Exemples de mouvements.

65. Mouvement uniformément varié. — Un mouvement rectiligne est uniformément varié quand la vitesse varie proportionnellement au temps: dans un tel mouvement, v est une fonction du premier degré de t; on a

$$v=a+bt;$$

on en déduit, pour l'accélération,

$$\gamma=\frac{dv}{dt}=b;$$

l'accélération est constante. Réciproquement, si l'accélération est constante, le mouvement est uniformément varié; en effet, soit γ la valeur constante de l'accélération; de l'équation

$$\frac{dv}{dt}=\gamma$$

on déduit, en remontant à la primitive,

(1) $$v=v_0+\gamma t,$$

v_0 désignant la vitesse du mobile à l'instant $t=0$. On aura ensuite

$$\frac{dx}{dt}=v=v_0+\gamma t,$$

d'où, en remontant à la primitive,

$$(2) \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma^2 t,$$

x_0 désignant l'abscisse du mobile à l'instant $t = 0$. On voit que dans un mouvement uniformément varié l'abscisse x est une fonction entière du 2[e] degré du temps. Réciproquement, s'il en est ainsi, le mouvement est uniformément varié ; supposons en effet que l'on ait

$$x = at^2 + bt + c\,;$$

on en déduit $\qquad v = 2at + b,$

ce qui montre que le mouvement est uniformément varié.

Éliminons t entre les équations (1) et (2) ; pour cela, de la première je tire

$$t = \frac{v - v_0}{\gamma}$$

et je porte cette valeur de t dans la seconde ; on aura

$$x - x_0 = v_0 \frac{v - v_0}{\gamma} + \frac{1}{2} \gamma \frac{(v - v_0)^2}{\gamma^2},$$

et, après simplification,

$$(3) \qquad v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0).$$

66. Discussion. — Un mouvement rectiligne est dit *accéléré* quand la valeur absolue de la vitesse croît, c'est-à-dire quand le carré de la vitesse croît ; il est dit *retardé* quand la valeur absolue de la vitesse décroît, c'est-à-dire quand le carré de la vitesse décroît. Or on a

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 2v\gamma\,;$$

donc :

Si v et γ sont de même signe, le mouvement est accéléré ;

Si v et γ sont de signes contraires, le mouvement est retardé.

Cela posé, la formule

$$v = v_0 + \gamma t$$

montre que la vitesse s'annule une seule fois à l'instant $\tau = -\frac{v_0}{\gamma}$; avant l'instant τ, v et γ sont de signes contraires,

le mouvement est retardé ; après l'instant τ, v et γ sont de même signe, le mouvement est accéléré.

Prenons comme instant initial l'instant τ où la vitesse est nulle, comme origine O la position du mobile à cet instant ; cela revient à supposer que dans les formules (1) et (2) on fait v_0 et x_0 égaux à zéro. On aura donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= \gamma t, \\ x &= \frac{1}{2}\gamma t^2, \\ v^2 &= 2\gamma x. \end{aligned} \right.$$

On voit que x a toujours le signe de γ ; supposons pour fixer les idées γ positif, le mobile restera toujours sur la demi-droite Ox. Si M est un point de cette demi-droite, le mobile passe deux fois en M, aux instants

$$t = \pm\sqrt{\frac{2\text{OM}}{\gamma}},$$

c'est-à-dire une fois avant l'instant initial et une fois après ; le mobile met d'ailleurs le même temps pour aller de M en O que pour aller de O en M ; enfin la valeur absolue de la vitesse en ces deux instants est la même.

En comptant les temps à partir du moment où la vitesse est nulle et les espaces à partir du point O où la vitesse est nulle, on a les deux lois suivantes du mouvement :

1° *Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir ;*

2° *Les vitesses sont proportionnelles aux temps employés à les acquérir.*

Ces énoncés sont une conséquence immédiate des formules (4).

67. Mouvement circulaire. — Vitesse angulaire à un instant. — Soient M (*fig.* 25) un point mobile sur un cercle de centre O et de rayon R, xOy un angle égal à $+90°$, A et B les points où les demi-droites Ox et Oy coupent le cercle. Nous prendrons comme origine des arcs le point A, et comme sens positif sur le cercle celui de A vers B ; soient à un instant quelconque M la

position du mobile, θ l'angle xOM, s l'arc AM. On aura

$$s = R\theta.$$

La valeur algébrique de la vitesse sera

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}.$$

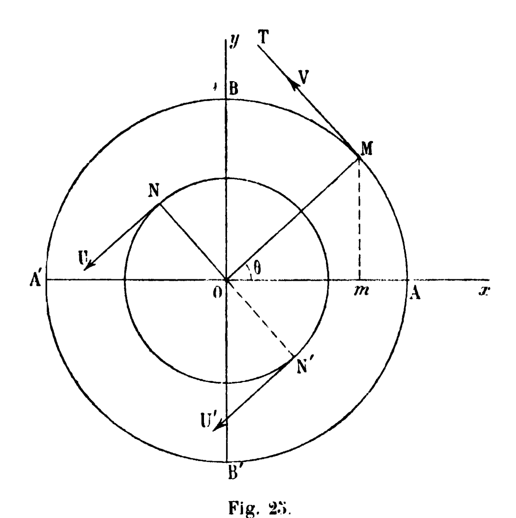


Fig. 25.

$\frac{d\theta}{d}$ est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* du rayon OM à l'instant t ; nous la désignerons par ω ; on aura donc

$$v = R\omega.$$

v est la *vitesse linéaire* du point M ; donc :

La vitesse linéaire dans un mouvement circulaire est égale au produit du rayon par la vitesse angulaire.

68. Mouvement circulaire uniforme. — Imaginons, en particulier, que le point M se déplace sur le cercle d'un mouvement uniforme ; s et par suite θ varient proportionnellement au temps, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ sont constants ; la vitesse angulaire et la vitesse linéaire sont donc constantes.

Soit T la durée de la révolution du mobile ; pendant le temps

T, θ augmente de $+2\pi$ ou de -2π suivant que le mobile se meut dans le sens positif ou dans le sens négatif; on aura donc

$$\omega = \pm \frac{2\pi}{T}.$$

69. Accélération dans un mouvement circulaire uniforme. — Formons l'hodographe du mouvement du point M en prenant comme origine le centre O du cercle. Si ω est positif, le point de l'hodographe qui correspond au point M est un point N tel que l'angle MON soit égal à $+90°$, la longueur ON étant égale à ωR ; si ω est négatif, le point de l'hodographe qui correspond au point M est le point N′ symétrique de N par rapport au point O. Dans l'un et l'autre cas, l'hodographe est un cercle de centre O, de rayon égal à la valeur absolue de $R\omega$, décrit d'un mouvement uniforme, la vitesse angulaire étant égale à ω.

Si ω est positif, la vitesse NU de N fait un angle égal à $+90°$ avec ON, c'est-à-dire un angle de 180° avec OM ; si ω est négatif, la vitesse N′U′ du point N′ fait un angle égal à $-90°$ avec ON′, c'est-à-dire un angle de $-180°$ avec OM ; dans l'un et l'autre cas, l'accélération est dirigée de M vers O.

Calculons sa valeur absolue ; c'est celle de NU ou de N′U′ suivant les cas ; elle est égale au produit de ω par le rayon ON ou O′N′ qui a pour valeur absolue ωR.

L'accélération est donc égale à

$$\omega^2 R \qquad \text{ou à} \qquad \frac{v^2}{R};$$

donc :

Dans un mouvement circulaire uniforme l'accélération est dirigée vers le centre ; elle est égale au produit du rayon par le carré de la vitesse angulaire, ou encore au quotient du carré de la vitesse linéaire par le rayon.

70. Mouvement oscillatoire simple sur une droite. — Imaginons un mobile M qui se meut d'un mouvement uniforme sur un cercle, la vitesse angulaire étant égale à ω ; la projection m du point M sur un diamètre $x'Ox$ décrit ce qu'on appelle *un mouvement oscillatoire simple* sur la droite $x'Ox$. Soient A et A′ les points où le diamètre $x'Ox$ rencontre le cercle ; menons le

diamètre $y'Oy$ perpendiculaire au diamètre $x'Ox$; ce diamètre coupe le cercle en B et B'. Quand le mobile M va de A en B, le mobile m va de A en O ; quand M va de B en A', m va de O en A' ; quand M va de A' en B', m va de A' en O ; enfin quand M va de B' en A, m va de O en A ; on voit que le point m oscille entre A et A'.

La durée d'une *oscillation double* ou d'une *oscillation complète* est égale au temps que met le mobile m pour aller de A en A' et revenir de A' en A ; elle est égale à la durée de la révolution du point M sur le cercle, c'est-à-dire que cette durée T est égale (68) à

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cette durée T est ce qu'on appelle la *période*. Au bout du temps T le point M reprend la même position sur le cercle et il reprend aussi la même vitesse ; il en résulte que le point m reprend après un temps T la même position et la même vitesse.

On appelle *fréquence* le nombre N des oscillations à la seconde : N est l'inverse de T.

L'abscisse x du point m s'appelle *l'élongation* ; l'élongation varie entre $-R$ et $+R$; la valeur maximum R de l'élongation est *l'amplitude* du mouvement vibratoire ; enfin l'angle AOM est la *phase de vibration*.

Le milieu O de AA' est le *centre de vibration*.

Prenons comme origine du temps l'instant d'un passage en A ;

on aura $$xOM = \theta = \omega t,$$

et par suite $$Om = x = R \cos \omega t.$$

On en déduit

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega R \sin \omega t,$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 R \cos \omega t.$$

De ces formules on déduit aussi

$$\frac{v^2}{\omega^2} + x^2 = R^2,$$

$$\gamma = -\omega^2 x,$$

qui donnent v et γ en fonction de x.

71. Remarque. — Un mouvement défini par l'équation

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

se ramène au précédent en changeant l'origine du temps ; on peut en effet écrire

$$x = a \cos \omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right) = a \cos \omega t'$$

en faisant
$$t' = t + \frac{\alpha}{\omega},$$

ce qui revient à compter les temps à partir de l'instant $\frac{\alpha}{\omega}$.

On voit de même que si l'on a

$$x = a \sin(\omega t + \alpha),$$

on peut écrire
$$x = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \alpha\right);$$

on est par conséquent ramené au cas précédent.

Enfin si l'on avait

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

on pourrait poser

$$A = a \cos \alpha,$$
$$B = - a \sin \alpha,$$

et l'on aurait
$$x = a \cos(\omega t + \alpha);$$

on a donc encore un mouvement oscillatoire.

EXERCICES

1. Deux mobiles M et M′, animés d'un mouvement uniforme, décrivent une même droite $x'x$; trouver l'instant où ils se rencontrent et leur point de rencontre. Discussion.

2. Même problème pour des points animés d'un mouvement uniforme sur un cercle.

3. Sur une droite $x'x$ un mobile M a un mouvement uniformément varié, un mobile M′ se meut uniformément sur la même droite ; on demande si les mobiles peuvent se rencontrer, où et à quel moment ils se rencontrent. Discussion.

4. On considère un mouvement rectiligne défini par l'équation

$x = t \sin t$; trouver à chaque instant la vitesse, l'accélération ; indiquer les phases du mouvement.

5. Déterminer un mouvement rectiligne uniformément varié, connaissant les positions du mobile à trois instants donnés.

6. Déterminer les éléments d'un mouvement oscillatoire, connaissant le centre des oscillations, la position du mobile et sa vitesse à un instant donné.

7. Un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié part d'un point A sans vitesse initiale. Il parcourt un kilomètre en une heure ; calculer le nombre qui mesure l'accélération en prenant comme unité de longueur le mètre et comme unité de temps la seconde.

Calculer le même nombre en prenant comme unité de longueur le centimètre et comme unité de temps la minute.

8. Un cercle dont le rayon est 10 mètres est parcouru d'un mouvement uniforme en trois heures par un mobile ; calculer la vitesse linéaire et l'accélération du mobile en prenant comme unité de longueur le centimètre et comme unité de temps la seconde.

9. Un point se meut sur une parabole de telle sorte que sa projection sur la directrice ait un mouvement uniforme. Trouver la vitesse et l'accélération de ce point.

10. Si dans un mouvement curviligne l'accélération conserve toujours la même direction, la trajectoire du mobile est une courbe plane.

11. Deux points M et M′ se meuvent respectivement sur deux droites rectangulaires Ox, Oy de telle sorte que la distance MM′ reste fixe ; le mouvement de M étant supposé uniforme, trouver le mouvement de M′.

CHAPITRE IV

CINÉMATIQUE DU CORPS SOLIDE

§ I.

Généralités.

72. Définition. — Un corps solide B est *en repos*, par rapport à un corps solide A, quand chaque point du corps B est immobile par rapport au corps solide A. Dans le cas contraire, le corps B est *en mouvement* par rapport au corps A.

Soient B un corps mobile par rapport au corps A, B_0 et B_1 les positions qu'occupe B aux instants t_0 et t_1, M_0 un point de B_0 ; quand le corps solide B va de la position B_0 à la position B_1, le point M_0 vient occuper une position M_1. Les points M_0 et M_1 sont appelés *points homologues* des positions B_0 et B_1. On définit de même les *segments homologues, droites homologues, angles plans homologues, dièdres homologues, trièdres homologues*, etc., dans les positions B_0 et B_1.

De la définition du corps solide (37) résultent immédiatement les propriétés suivantes :

Deux segments de droite homologues ont même longueur ;

Si deux droites sont parallèles, leurs homologues sont parallèles ;

Deux angles plans homologues sont égaux ;

Deux dièdres homologues sont égaux et ont même sens ;

Deux trièdres homologues sont de même sens, leurs éléments correspondants sont égaux.

73. Théorème. — *La position d'un corps solide est déterminée quand on se donne les positions de trois de ses points non situés en ligne droite.*

Soient (β_0) la position d'un corps solide à l'instant t_0, A_0, B_0, C_0 trois points du corps non situés en ligne droite (*fig.* 26); supposons qu'à l'instant t, les points A_0, B_0, C_0 viennent respectivement en A, B, C (le triangle ABC doit naturellement être égal au triangle $A_0B_0C_0$); je dis qu'on peut fixer à l'instant t la position M que vient occuper un point quelconque M_0 du corps (β_0). En effet, les angles dièdres CABM et $C_0A_0B_0M_0$ doivent être égaux et de même sens, ce qui définit sans ambiguïté le demi-plan MAB; dans ce demi-plan faisons un angle BAM égal à l'angle $B_0A_0M_0$; on obtiendra ainsi, sans ambiguïté, la demi-droite AM homologue de la demi-droite A_0M_0; prenons sur cette demi-droite une longueur AM égale à la longueur A_0M_0 : on obtient ainsi l'homologue M du point M_0.

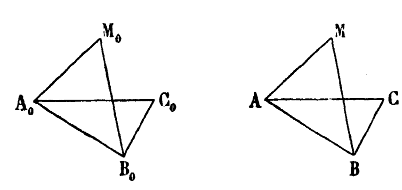


Fig. 26.

74. Corollaire I. — Si A, B, C coïncident respectivement avec A_0, B_0, C_0, le point M coïncidera avec le point M_0; donc :

Si trois points non situés en ligne droite d'un corps solide restent fixes par rapport à un système de comparaison, le corps solide est fixe par rapport à ce système.

75. Corollaire II. — Il résulte de ce qui précède (n° 73) que pour définir le mouvement du corps solide (β) par rapport au corps solide (α), il suffit de connaître les positions A, B, C qu'occupent à l'instant t les points A_0, B_0, C_0 du corps (β_0). On peut choisir arbitrairement les positions A, B, C de ces points pourvu que le triangle ABC soit égal au triangle $A_0B_0C_0$.

76. Remarque. — Pour fixer la position du corps solide à l'instant t, on peut se donner arbitrairement la position A que vient occuper un point A_0 de ce corps, et les positions AB, AC que viennent occuper les demi-droites A_0B_0, A_0C_0; ces positions AB, AC peuvent être choisies d'une façon quelconque pourvu que l'angle BAC soit égal à l'angle $B_0A_0C_0$.

§ II.

Mouvement de translation.

77. Définition. — *Un corps solide* (β) *est animé d'un mouvement de translation par rapport à un corps solide* (α) *si deux demi-droites* Ax, Ay *du corps* (β) *ont constamment la même direction que deux demi-droites* A_0x_0, A_0y_0 *fixes par rapport au corps* (α).

La possibilité d'un tel mouvement résulte de la remarque du n° 76.

78. Théorème. — *Dans un mouvement de translation, toute droite du corps* (β) *reste parallèle à une droite fixe par rapport au corps* (α).

En effet, soit D une demi-droite du corps mobile (β) (*fig.* 27);

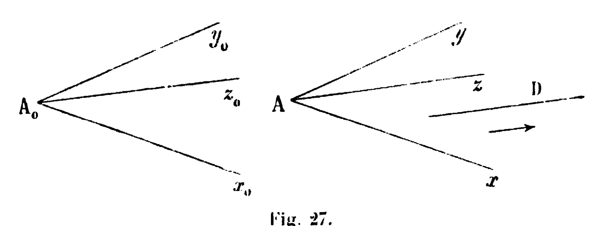


Fig. 27.

menons par A une demi-droite Az ayant la même direction que la droite D; construisons un demi-plan $x_0A_0z_0$ tel que les dièdres $y_0A_0x_0z_0$ et $yAxz$ soient égaux et de même sens, puis dans ce demi-plan un angle $x_0A_0z_0$ égal à l'angle xAz : le dièdre $yAxz$ reste constant comme grandeur et comme sens, il en est donc de même du dièdre $y_0A_0x_0z_0$. De même, l'angle xAz restant constant, l'angle $x_0A_0z_0$ restera fixe ; il en résulte que la droite A_0z_0 est fixe par rapport au corps (α).

D'autre part, les plans $y_0A_0x_0$ et yAx étant parallèles et de même sens, de plus les dièdres $y_0A_0x_0z_0$ et $yAxz$ ayant même grandeur et même sens, les demi-plans $z_0A_0x_0$ et zAx sont

parallèles et de même sens; enfin l'égalité des angles $x_0A_0z_0$ et xAz montre que les droites Az, A_0z_0 ont la même direction.

La demi-droite D du corps mobile a donc constamment la même direction qu'une demi-droite A_0z_0 fixe par rapport au système de comparaison (α).

79. Remarque I. — Soient A et B deux points du corps mobile (β) dans la position qu'occupe ce corps à l'instant t; à l'instant initial les points A et B coïncident avec les points A_0 et B_0 du corps (α); la direction AB reste la même que la direction A_0B_0; de plus les segments AB et A_0B_0, étant des segments homologues, sont égaux; il en résulte que AB et A_0B_0 sont des vecteurs équipollents; donc :

Si un corps solide (β) est animé d'un mouvement de translation par rapport à un corps solide (α), tout segment du corps (β) reste équipollent à un segment fixe par rapport au corps (α).

80. Remarque II. — Une droite d'un corps solide (β) peut conserver une direction fixe par rapport à un système de comparaison (α), bien que la direction de cette droite puisse changer par rapport à un autre système de comparaison.

Considérons, par exemple, un manège de chevaux de bois: sur le plancher du manège traçons à la craie une droite A_0B_0; imaginons maintenant une barre AB qui se déplace sur le plancher du manège en restant constamment parallèle à la droite A_0B_0; relativement au plancher du manège, cette barre est animée d'un mouvement de translation. Au contraire, pour un observateur fixe sur le sol, qui regarde tourner le manège, la barre AB n'est plus animée d'un mouvement de translation; par rapport à cet observateur la direction de A_0B_0, et par suite celle de AB, change.

81. Théorème. — *Le mouvement de translation d'un corps solide est défini quand on connaît le mouvement d'un point de ce corps.*

En effet, soit (β_0) la position du corps mobile à l'instant initial t_0; supposons que l'on connaisse le mouvement d'un

point A_0 de ce corps, c'est-à-dire que l'on connaisse la position A que vient occuper le point A_0 à un instant quelconque t *fig.* 28). Soit alors M_0 un point de (β_0) ; pour avoir la position M qu'occupe ce point à l'instant t, il suffit de mener un vecteur AM équipollent au vecteur A_0M_0 ; il en résulte que le mouvement du point M_0 est bien déterminé.

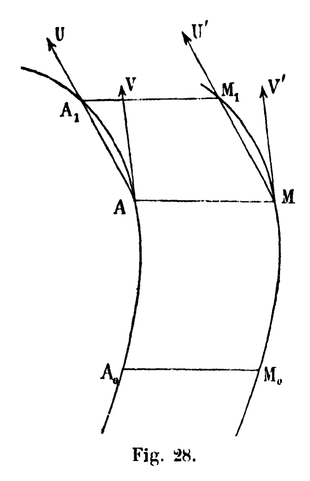


Fig. 28.

82. Remarque. — On passe de la trajectoire du point A_0 à celle du point M_0 en menant par chaque point A de la première trajectoire un vecteur AM équipollent au vecteur A_0M_0 ; on passe par conséquent de la première trajectoire à la seconde par un déplacement de translation. (*Traité de Géométrie,* 1re partie, n° 652.) Il en résulte le théorème suivant :

Dans un mouvement de translation les trajectoires de tous les points du corps solide sont des courbes égales ; on peut les superposer par un déplacement de translation.

Si l'une de ces trajectoires est une droite, les autres seront des droites parallèles. On dit alors que le mouvement de translation du corps est *rectiligne.*

83. Théorème. — *Dans un mouvement de translation les vitesses de tous les points du corps solide ont, au même instant, la même grandeur géométrique.*

Considérons, en effet, deux points quelconques A_0 et M_0 du corps solide (*fig.* 28) ; soient A et M les positions de ces points à l'instant t, A_1 et M_1 leurs positions à l'instant $t+h$; les vecteurs AM, A_1M_1 étant équipollents, la figure AMM_1A_1 est un parallélogramme, donc les vecteurs AA_1 et MM_1 ont même grandeur géométrique. Il en est de même des vitesses moyennes AU et MU', qui sont respectivement égales à $\frac{AA_1}{h}$ et à $\frac{MM_1}{h}$; en

faisant tendre h vers zéro, on voit que les vitesses AV, MV′ des points A et M ont même grandeur géométrique.

Cette vitesse commune à tous les points du corps solide à l'instant t est ce qu'on appelle la *vitesse de translation du système mobile à l'instant t.*

Si le mouvement de translation est rectiligne et si la vitesse de translation reste constante, on dit que le mouvement de translation est *rectiligne et uniforme.*

Si le mouvement de translation est rectiligne et si la vitesse de translation varie proportionnellement au temps, on dit que le mouvement de translation est un mouvement *rectiligne uniformément varié.*

84. **Théorème.** — *Dans un mouvement de translation, les accélérations de tous les points du corps solide ont, au même instant, la même grandeur géométrique.*

En effet, les vitesses de tous les points étant représentées par des vecteurs équipollents, les hodographes des mouvements de tous les points seront des courbes identiques parcourues suivant la même loi ; donc l'accélération de chaque point a à un instant donné la même grandeur géométrique.

Cette accélération, commune à tous les points du corps solide à l'instant t, est ce qu'on appelle l'*accélération de translation du système mobile à l'instant t.*

§ III.

Mouvement de rotation.

85. **Définitions.** — Lorsque deux points d'un corps solide (β) restent fixes par rapport à un corps (α), le mouvement que prend ce corps (β) par rapport au solide (α) est appelé un *mouvement de rotation.*

Soient A et B les deux points qui restent fixes, tous les points de la droite AB restent fixes par rapport au corps solide (α) ; cette droite fixe AB est l'*axe de rotation.* Nous supposerons qu'on ait fixé un sens positif sur cet axe ; prenons le sens de A vers B (*fig.* 29).

Soient (β_0) la position du solide à l'instant t_0, (β) sa position à l'instant t, M_0 un point de (β_0), M son homologue dans (β) ; abaissons de M_0 la perpendiculaire M_0P sur l'axe : le point P coïncide avec son homologue, la droite PM_0 a donc pour homologue la droite PM, par conséquent PM est perpendiculaire à l'axe et la longueur PM est égale à PM_0. Il en résulte que la trajectoire du point M_0 est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe.

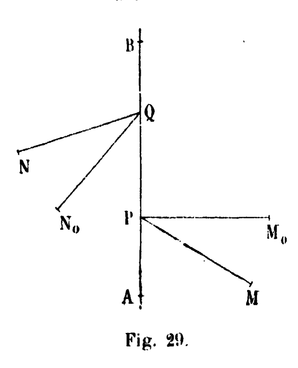


Fig. 29.

Je dis de plus que l'angle dièdre M_0ABM est le même pour tous les points du corps mobile ; en effet, soit N_0 un point de (β_0) qui vient en N à l'instant t. Les deux dièdres homologues M_0ABN_0 et MABN sont égaux ; en ajoutant à chacun d'eux le dièdre N_0ABM, on aura

$$(M_0ABN_0) + (N_0ABM) = (N_0ABM) + (MABN),$$

ou

$$(M_0ABM) = (N_0ABN),$$

ce qui montre bien que la valeur du dièdre M_0ABM est la même pour tous les points du corps solide. Cet angle dièdre a un signe, puisqu'on a fixé un sens positif AB sur l'arête ; la valeur algébrique de ce dièdre est *l'angle dont a tourné le corps autour de l'axe* pour passer de la première position à la seconde.

86. Rotation instantanée. — Considérons les positions du corps mobile aux instants t et $t+h$: soit $\Delta\varphi$ l'angle dont a tourné le corps autour de l'axe pour passer de la première position à la seconde ; la limite ω du rapport $\frac{\Delta\varphi}{h}$ quand h tend vers zéro est la valeur algébrique de la *vitesse de rotation à l'instant t*. On représente aussi cette vitesse par un vecteur porté sur l'axe et ayant pour mesure algébrique ω. Ce vecteur représente la *rotation instantanée*.

87. Remarque. — Soit OL_0 une droite perpendiculaire à l'axe et fixe par rapport au système de comparaison (α); soit OL une perpendiculaire à l'axe fixe par rapport au corps mobile (β); pour fixer la position de (β), il suffit de connaître la position de OL, c'est-à-dire la valeur algébrique φ de l'angle L_0ABL; on peut donc définir le mouvement de rotation du corps en se donnant φ en fonction de t.

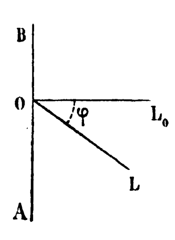


Fig. 30.

Si l'on définit le mouvement de cette façon, la vitesse de rotation, à un instant quelconque, est égale à la dérivée de φ par rapport à t.

88. Théorème. — *A un instant quelconque, la vitesse d'un point quelconque* M *du corps mobile est égale au moment linéaire du vecteur qui représente la rotation instantanée par rapport au point* M.

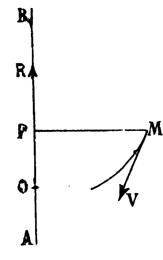


Fig. 31.

Soient AB l'axe de rotation (*fig.* 31), OR le vecteur qui représente la vitesse de rotation, ω la valeur algébrique de ce vecteur; abaissons du point M la perpendiculaire MP sur l'axe. Le point M se meut sur un cercle de centre P dont le plan est perpendiculaire à l'axe; le rayon PM de ce cercle a une vitesse angulaire (67) qui a pour valeur absolue ω; il en résulte que la vitesse MV du point M est perpendiculaire au plan MAB et a pour grandeur $\omega \times MP$. Cette vitesse est dirigée dans le sens du mouvement; si donc ω est positif, le sens relatif des vecteurs MV et AB est positif; si ω est négatif, ce sens relatif est le sens négatif; dans les deux cas le sens relatif des vecteurs MV et OR est le sens positif; il en résulte que MV est le moment linéaire du vecteur OR par rapport au point M.

89. Mouvement de rotation uniforme. — Un mouvement de rotation est uniforme si la vitesse de rotation est constante. Si on définit le mouvement comme au n° 87, on voit que dans un mouvement de rotation uniforme l'angle φ varie proportionnellement au temps.

Si, par exemple, on conçoit un trièdre ayant son sommet au centre de la terre et dont les arêtes sont dirigées vers des étoiles données, par rapport à ce trièdre la terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme ; la durée de la rotation, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la terre tourne d'un angle 2π, est le *jour sidéral* : on sait (voir *Traité de Cosmographie* de Grignon) que 366,24 jours sidéraux forment une durée égale à 365,24 jours moyens. Le nombre de secondes de temps moyen contenues dans un jour sidéral est donc

$$86\,400 \times \frac{365,24}{366,24},$$

et par conséquent la vitesse de rotation de la terre est

$$\omega = \frac{2\pi \times 366,24}{86\,400 \times 365,24} = 0,000073.$$

§ IV.

Hélice. — Mouvement hélicoïdal.

90. Développement d'un cylindre sur un plan. — Enroulement d'un plan sur un cylindre. — Considérons un cylindre de révolution dont les bases sont les cercles AA′, BB′ (*fig.* 32) ;

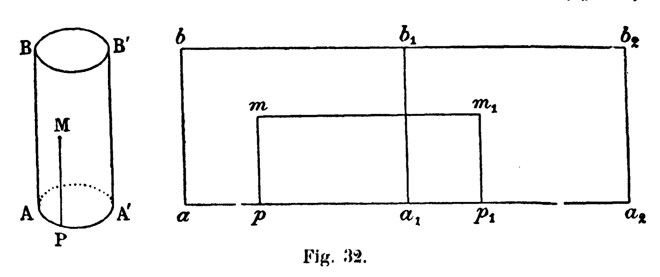


Fig. 32.

construisons un rectangle aba_1b_1 dont la hauteur ab soit égale à la hauteur AB du cylindre, et dont la base aa_1 soit égale à la longueur de la circonférence de base AA′ du cylindre.

Soit maintenant M un point quelconque du cylindre ; menons la génératrice MP qui rencontre le cercle de base AA′ au

point P; prenons sur le côté aa_1 une longueur ap égale à l'arc de cercle AP; menons à la base aa_1 une perpendiculaire pm égale à PM ; on fait ainsi correspondre à chaque point M de la surface latérale du cylindre un point m du rectangle aa_1bb_1, et inversement.

Cette correspondance porte deux noms différents suivant qu'on considère comme position initiale de la figure le cylindre ou le rectangle. Si l'on passe du cylindre au rectangle on dit qu'on a *développé* le cylindre sur un plan ; le rectangle aa_1bb_1 est le *développement* de la surface latérale du cylindre.

Si l'on passe au contraire du rectangle au cylindre, on dit qu'on a *enroulé* le plan du rectangle sur le cylindre.

A chaque génératrice du cylindre correspond une droite parallèle à la hauteur ab du rectangle ; à une section droite du cylindre correspond une parallèle au côté aa_1 du rectangle.

Construisons un second rectangle $a_1b_1a_2b_2$ égal au rectangle aba_1b_1. Après avoir enroulé le rectangle aba_1b_1 sur le cylindre, on peut enrouler ensuite le rectangle $a_1b_1a_2b_2$; soit m_1 le point de ce rectangle qui vient en M ; menons la perpendiculaire m_1p_1 à la base du rectangle. On aura

$$m_1p_1 = \mathrm{MP} = mp,$$
$$a_1p_1 = \text{arc AP} = ap ;$$

par conséquent,

$$mm_1 = pp_1 = aa_1 = \text{circ. AA}'.$$

Les deux points m et m_1 sont sur une parallèle aux bases des rectangles, et leur distance est égale à la circonférence de base du cylindre.

On pourrait de même imaginer un troisième rectangle $a_2b_2a_3b_3$ égal aux précédents et l'enrouler encore sur le cylindre, et ainsi de suite. On arrive ainsi à concevoir l'enroulement d'un plan indéfini sur un cylindre indéfini. Voici comment se fait cet enroulement :

Traçons dans le plan deux droites rectangulaires $x'ox$, $y'oy$ (*fig.* 33). Soit m un point du plan ; menons la perpendiculaire mp à ox. La longueur op, prise positivement si p est sur ox, négativement si p est sur ox', est l'*abscisse* du point m ; la longueur pm, prise avec le signe + si pm a même direction

que oy, et avec le signe — si pm est dirigé suivant oy', est l'*ordonnée* du point m.

Cela posé, considérons un cylindre droit qui a pour base le

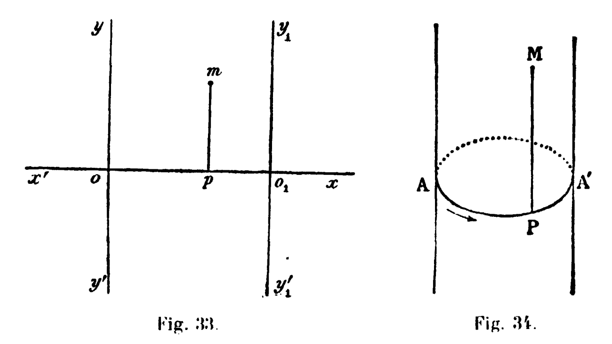


Fig. 33. Fig. 34.

cercle AA' (*fig.* 34); distinguons les deux côtés du plan du cercle de base ; l'un sera le côté supérieur, l'autre le côté inférieur ; prenons une origine A sur le cercle de base, fixons un sens positif de déplacement sur ce cercle. Décrivons alors sur ce cercle un chemin AP égal à l'abscisse du point m, ce chemin AP étant effectué dans le sens positif si l'abscisse est positive, dans le sens négatif si l'abscisse est négative ; menons la génératrice du point P, et prenons une longueur PM égale à l'ordonnée du point m, cette longueur PM étant portée au-dessus ou au-dessous du plan du cercle de base selon que l'ordonnée est positive ou négative.

A chaque point m du plan on fait correspondre un point M du cylindre ; mais à chaque point M du cylindre correspond une infinité de points m ; tous ces points ont une ordonnée égale à PM, ils sont donc situés sur une parallèle à la droite $x'ox$; les abscisses de ces points sont les diverses valeurs algébriques du chemin AP ; on sait que ces diverses valeurs diffèrent de l'une d'elles de multiples de la circonférence de base AA'.

Prenons sur ox une longueur oo_1 égale à la circonférence de base du cylindre et menons $y'_1o_1y_1$ parallèle à $y'oy$ (*fig.* 33); la portion de plan comprise entre les deux parallèles $y'oy$, $y'_1o_1y_1$ vient après l'enroulement recouvrir tout le cylindre ;

à chaque point du cylindre correspond un seul point de cette région.

Si le point M du cylindre décrit une courbe C, le point correspondant m décrit une courbe c, qu'on appelle la *développée* de la courbe C.

91. Définition. — On appelle *hélice* la ligne suivant laquelle vient se placer une droite située dans un plan indéfini qu'on enroule sur un cylindre.

Prenons pour origine o des droites ox, oy un point a de la droite (*fig.* 35); marquons la région du plan $y'y$, y'_1y_1 qui

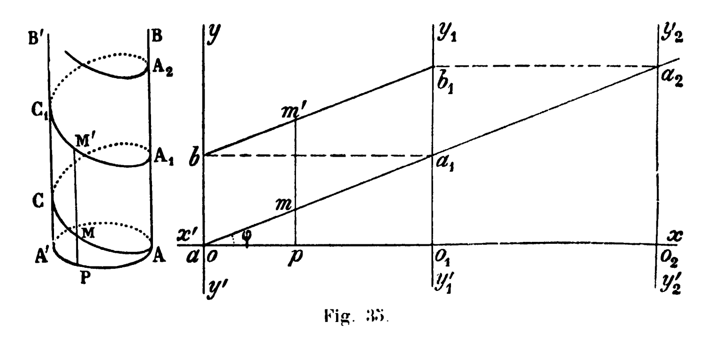


Fig. 35.

vient recouvrir le cylindre ; au point a du plan correspond un point A, au point a_1 un point A_1 situé sur la génératrice AB ; au segment aa_1 correspond un arc de courbe ACA_1 qui rencontre une fois seulement toutes les génératrices du cylindre.

Marquons maintenant la seconde portion du plan y'_1y_1, y'_2y_2 qui s'enroule sur le cylindre ; le segment a_1a_2 de la droite qui est situé dans cette région donnera encore un arc de courbe $A_1C_1A_2$ analogue au précédent, et ainsi de suite, de sorte que la courbe se compose d'une infinité d'arcs tels que ACA_1 ; chacun de ces arcs rencontre toutes les génératrices et ne les rencontre qu'une fois.

Imprimons au segment a_1a_2 une translation égale à o_1o, il vient occuper la position bb_1 ; si l'on enroule la portion de plan $y'y$, y'_1y_1 sur le cylindre, bb_1 produira la même courbe $A_1C_1A_2$ que le segment a_1a_2 ; menons une ordonnée quelconque pmm' ;

il y correspond sur le cylindre trois points P, M, M′ d'une même génératrice ; le segment MM′ égal à mm' ou ab est donc le même quelle que soit la génératrice du cylindre. Ainsi la portion de génératrice comprise entre les arcs ACA_1 et $A_1C_1A_2$ est la même pour toutes les génératrices ; il en résulte qu'on peut par une translation parallèle aux génératrices faire coïncider les arcs ACA_1, $A_1C_1A_2$. L'hélice se compose donc d'une infinité d'arcs égaux, chaque arc rencontrant, et une fois seulement, toutes les génératrices du cylindre.

Chacun de ces arcs, tels que ACA_1, est une *spire* de l'hélice. La portion de génératrice comprise entre deux spires consécutives est le *pas* de l'hélice.

92. Remarque. — Le pas de l'hélice est égal à la longueur o_1a_1 ; si l'on désigne par r le rayon du cylindre, par h le pas de l'hélice, par φ l'angle que fait la droite génératrice aa_1a_2... avec ox, on aura

$$h = 2\pi r \operatorname{tg} \varphi.$$

93. Sens d'une hélice. — Fixons provisoirement un sens positif sur l'axe d'un cylindre ; supposons qu'un point M se déplace sur l'hélice de façon que sa projection sur l'axe se déplace dans le sens positif ; la projection P du point M de l'hélice sur le plan de base du cylindre se déplace autour de l'axe dans un sens qui ne dépend pas du sens positif choisi sur l'axe. En effet, si l'on change la direction positive de l'axe, on change le sens du déplacement du point M, et par suite le sens du déplacement du point P. Le sens de déplacement de P et le sens positif de l'axe étant changés, le sens de la rotation du point P autour de l'axe n'a pas changé.

Si le point P tourne autour de l'axe de gauche à droite, l'hélice est dite *dextrorsum* ; dans le cas contraire, l'hélice est *sinistrorsum*.

94. Remarque. — Quand on connaît le pas d'une hélice, on connaît l'angle φ que fait la droite génératrice avec ox, car on a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{2\pi r}.$$

Deux hélices de même pas et de même sens sont engendrées par deux droites parallèles.

Deux hélices de même pas et de sens contraire sont engendrées par deux droites non parallèles, également inclinées sur ox.

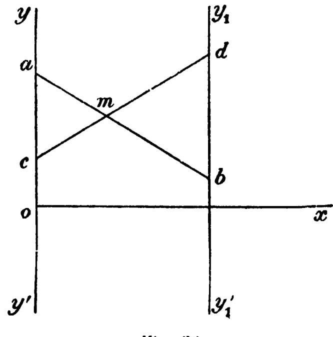


Fig. 36.

Par un point M d'un cylindre on peut mener deux hélices ayant un pas donné.

En effet, soit m le point de la région $y'y$, y'_1y_1 qui correspond au point M du cylindre (*fig.* 36); menons par ce point m les droites *ab, cd* qui font avec ox l'angle φ correspondant au pas donné; ces droites seront les droites génératrices des hélices cherchées.

95. Théorème. — *La distance* MP *d'un point d'une hélice au cercle de base* AA' *est proportionnelle à l'arc de cercle* AP (*fig.* 37).

En effet, soient al la droite génératrice, m le point correspondant au point M, ap son abscisse, pm son ordonnée. On sait que

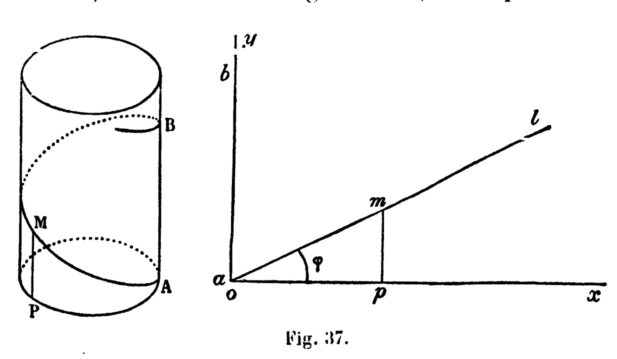


Fig. 37.

$$\text{arc AP} = ap, \qquad \text{PM} = pm;$$

donc
$$\frac{\text{PM}}{\text{arc AP}} = \frac{pm}{ap} = \text{tg}\,\varphi = \frac{h}{2\pi r},$$

d'où
$$\text{PM} = \text{arc AP} \times \frac{h}{2\pi r}.$$

96. Tangente à l'hélice. — Soient M un point d'une hélice, M′ un point voisin de M (*fig.* 38); menons la corde MM′; nous allons montrer que cette sécante tend vers une position limite quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. En effet, soient P et P′ les projections des points M et M′ sur le cercle de base; la droite MM′ coupe le cercle de base en un point R de la droite MM′. Nous allons montrer que le point R a une position limite.

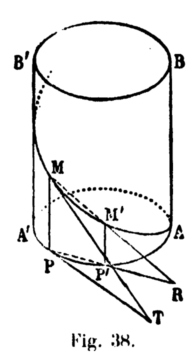


Fig. 38.

D'abord la droite PR a pour position limite la tangente PT au cercle de base au point P. Cherchons la limite de la longueur PR; on a

$$\frac{\text{PM}}{\text{PR}} = \frac{\text{P'M'}}{\text{P'R}} = \frac{\text{PM} - \text{P'M'}}{\text{PP'}}.$$

Or
$$\text{PM} = \text{arc AP} \,.\, \text{tg}\,\varphi,$$
$$\text{P'M'} = \text{arc AP'} \,.\, \text{tg}\,\varphi\,;$$

donc
$$\text{PM} - \text{P'M'} = \text{arc PP'} \times \text{tg}\,\varphi,$$

et l'on a
$$\frac{\text{PM}}{\text{PR}} = \frac{\text{arc PP'}}{\text{PP'}}\,\text{tg}\,\varphi.$$

Mais quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, le point P′ se rapproche indéfiniment du point P et le rapport $\frac{\text{arc PP'}}{\text{PP'}}$ tend vers 1; donc

$$\lim.\ \frac{\text{PM}}{\text{PR}} = \text{tg}\,\varphi,$$

$$\lim.\ \text{PR} = \frac{\text{PM}}{\text{tg}\,\varphi} = \text{arc AP}.$$

La position limite du point R est donc le point T situé sur

la tangente en P au cercle de base et à une distance PT du point P égale à l'arc AP.

La droite MM′ a donc une position limite, c'est la droite MT. Cette position limite est la tangente à l'hélice au point M.

97. Corollaire. — *La tangente à l'hélice fait un angle constant avec les génératrices du cylindre.* — En effet, dans le triangle rectangle MPT on a

$$\text{tg PTM} = \frac{\text{PM}}{\text{PT}} = \frac{\text{PM}}{\text{arc AP}} = \text{tg}\,\varphi.$$

L'angle MTP est donc égal à φ ; l'angle PMT formé par la tangente et la génératrice est le complément de l'angle φ.

98. Définition. — On appelle *sous-tangente* en un point M de l'hélice la projection PT, sur le plan de base, de la portion de tangente comprise entre le point de contact et le plan de la base.

99. Théorème. — *La sous-tangente en un point* M *de l'hélice est égale à la projection* AP *de l'arc d'hélice* AM *sur le cercle de base.*

En effet, nous avons démontré (96) que

$$\text{PT} = \text{arc AP}.$$

100. Déplacement hélicoïdal. — Considérons un corps solide β qui se déplace, par rapport à un corps solide α, de telle sorte qu'il existe une droite D du corps β qui à l'instant initial et à l'instant final coïncide avec une droite fixe Δ du corps α ; on dit alors que le corps β a subi un *déplacement hélicoïdal*.

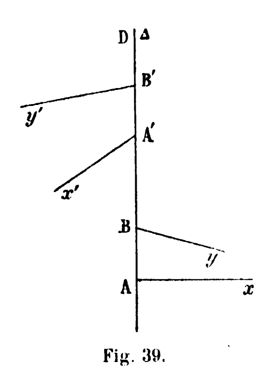


Fig. 39.

On voit que pour passer de la première position de la droite D à la seconde, il suffit de faire glisser cette droite sur la droite Δ. Considérons la position initiale de la droite D. Soient A et B deux points de cette droite (*fig.* 39) ; à l'instant final, ces points viennent en A′ et

B′ sur la droite Δ. De l'égalité des segments homologues AB, A′B′ résulte l'égalité des segments AA′, BB′ ; donc, quel que soit le point A de la droite D que l'on considère, la valeur algébrique AA′ du déplacement de ce point reste la même ; cette valeur algébrique, que nous désignerons par *h*, est la *longueur dont le corps a glissé le long de l'axe* Δ.

Considérons dans la première position une droite Ax perpendiculaire à D ; elle a pour homologue une droite A′x' perpendiculaire à D ; de même, une droite By perpendiculaire à D a pour homologue une droite B′y' perpendiculaire à D. Cela posé on démontre, comme pour le mouvement de rotation (n° 85), que les dièdres $(x\Delta x')$ et $(y\Delta y')$ ont même valeur algébrique. Cette valeur algébrique φ est *l'angle dont a tourné le corps autour de l'axe* Δ.

101. Remarque I. — Si l'on change le sens positif sur l'axe Δ, h et φ changent de signe, par conséquent le rapport $\frac{h}{\varphi}$ ne dépend pas du sens choisi sur l'axe Δ.

102. Remarque II. — On démontre que tout déplacement d'un corps solide est, en général, un déplacement hélicoïdal. Nous nous bornons ici à énoncer ce résultat.

103. Mouvement hélicoïdal. — Un corps solide β est animé d'un *mouvement hélicoïdal par rapport à un corps solide* α si une droite D du corps β coïncide constamment avec une droite Δ fixe par rapport à α et si le rapport entre la longueur dont le corps a glissé le long de Δ et l'angle dont il a tourné autour de Δ depuis l'instant initial est constant.

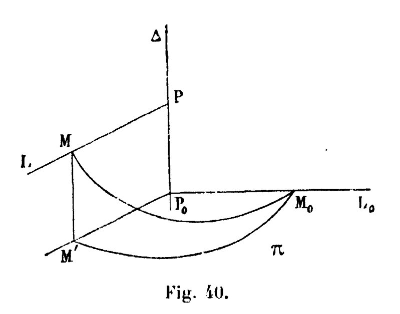


Fig. 40.

La droite Δ est l'*axe* de mouvement hélicoïdal.

Soient alors M_0 la position d'un point du corps à l'instant initial, M la position de ce point à l'instant final ; menons les

perpendiculaires M_0P_0 et MP à l'axe (*fig.* 40) et soit M' la projection du point M sur le plan mené par M_0 perpendiculairement à l'axe : ce point M' est situé sur le cercle qui a pour centre P_0 et pour rayon P_0M_0 ; l'angle dont a tourné le corps est égal à l'angle M_0P_0M' ; la longueur dont le corps a glissé est égale à P_0P ou à M'M. On aura donc

$$\frac{P_0P}{\widehat{M_0P_0M'}} = \mu,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{M'M}{\text{arc } M_0M'} = \frac{\mu}{P_0M_0},$$

et par conséquent (95) le point M décrit une *hélice*.

Le pas h de l'hélice est égal à la longueur dont a glissé le corps quand il a tourné d'un angle égal à 2π ; par suite,

$$h = 2\pi\mu ;$$

donc :

Dans un mouvement hélicoïdal tous les points du corps mobile décrivent des hélices de même pas.

Si μ est positif les hélices sont *dextrorsum*, et si μ est négatif les hélices décrites sont *sinistrorsum* (93).

104. Détermination du mouvement. — Soient β_0 et β les positions du mobile aux instants t_0 et t, P_0L_0 une droite de β_0 perpendiculaire à l'axe hélicoïdal Δ (*fig.* 40), PL l'homologue de cette droite ; pour définir la position du corps mobile à l'instant t, il suffit de fixer la position de la droite PL ; pour cela il suffit de se donner l'angle φ dont le corps a tourné et la longueur ζ dont il a glissé le long de l'axe. Le mouvement étant hélicoïdal, on aura

$$\zeta = \mu\varphi ;$$

μ étant une constante, il suffira ensuite pour définir le mouvement de se donner φ en fonction de t.

105. Vitesse instantanée de rotation et de glissement. — Considérons les positions du corps aux instants t et $t + \Delta t$; pour passer de la première position à la seconde, il faut faire

tourner le corps d'un angle $\Delta\varphi$ autour de l'axe, puis le faire glisser d'une longueur $\Delta\zeta$ le long de l'axe; cela posé, la limite ω de $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro est la vitesse de rotation du corps à l'instant t; la limite λ de $\frac{\Delta\zeta}{\Delta t}$ est la vitesse de glissement à l'instant t; $\Delta\zeta$ étant égal à $\mu\Delta\varphi$, λ est égal à $\mu\omega$.

On représente ces vitesses par des vecteurs portés sur l'axe hélicoïdal et ayant respectivement pour mesure ω et λ.

Si l'on définit le mouvement comme au n° 104, ω est la dérivée de φ par rapport à t, λ celle de ζ.

106. Vitesse dans le mouvement hélicoïdal. — Soient M_0 la position d'un point du corps mobile à l'instant t_0, M la position de ce point à l'instant t, M' la projection de M sur le plan Π mené par M_0 perpendiculairement à l'axe, P la projection de M sur l'axe (*fig.* 40).

La vitesse de M est la somme géométrique de ses projections sur le plan Π et sur l'axe. La projection de la vitesse du point M sur le plan Π est égale à la vitesse du point M'; le point M' se meut sur un cercle et le rayon P_0M' a une vitesse angulaire égale à ω; la vitesse de M' est donc égale à celle que posséderait ce point, ou ce qui revient au même à celle que posséderait le point M si le corps solide était animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe, la valeur de la rotation instantanée étant ω.

La projection de la vitesse de M sur l'axe est égale à la vitesse du point P, c'est-à-dire à la vitesse de glissement du corps. Donc :

Si ω et λ sont les vecteurs qui représentent la vitesse de rotation et la vitesse de glissement, la vitesse d'un point quelconque M *du corps est la somme géométrique de deux vecteurs :* 1° *la vitesse qu'aurait le point* M *dans un mouvement de rotation dont la vitesse de rotation est représentée par ω;* 2° *une vitesse de glissement équipollente au vecteur λ.*

On peut encore dire :

La vitesse d'un point quelconque M du corps solide est la

somme géométrique de deux vecteurs : 1° le moment linéaire de ω par rapport à M ; 2° le vecteur qui a pour origine M et qui a même grandeur géométrique que λ.

EXERCICES

1. On considère deux positions d'un corps solide ; soit D une droite qui rencontre son homologue D′ ; on mène les droites MM′ qui joignent un point M de la droite D à son homologue M′. Démontrer que le lieu des milieux de MM′ est une droite.

2. Soient A et B deux droites, O un point équidistant de ces deux droites. Mener par le point O une droite Δ telle qu'on puisse amener la droite A en coïncidence avec la droite B par une rotation autour de la droite Δ. Dans quel cas le problème est-il indéterminé ?

3. Soient A et B deux droites quelconques, *a* et *b* des points pris sur ces droites Trouver une droite Δ telle que par une rotation autour de Δ on puisse faire coïncider la droite A avec la droite B et que le point *a* vienne en *b*.

4. Soient D une droite d'un corps solide mobile, A et B deux points de cette droite. Démontrer qu'à un instant quelconque les projections des vitesses de A et de B sur la droite D sont égales.

5. Les vitesses de deux points A et B satisfaisant à la condition indiquée à l'exercice précédent, peut-on trouver un mouvement de rotation dans lequel les points A et B auraient des vitesses égales aux vitesses données ?

6. Une droite D fait des angles égaux avec les droites A et B ; les perpendiculaires communes aux droites D et A et aux droites D et B sont égales ; peut-on par un déplacement hélicoïdal d'axe D amener A en coïncidence avec B ?

7. Un corps solide se déplace de façon qu'une droite D de ce corps reste parallèle à une droite fixe par rapport au système de comparaison. Démontrer qu'à un instant quelconque les vitesses de tous les points de la droite D ont même grandeur géométrique.

8. Une barre rectiligne AB se déplace dans un plan de telle sorte que son extrémité A décrive d'un mouvement uniforme une droite Ox de ce plan et que l'angle xAB varie proportionnellement au temps. Trouver les vitesses de chaque point de la barre.

9. Étant donnés quatre plans A, B, A′, B′ tels que les angles dièdres (A, B), (A′, B′) soient égaux, trouver un déplacement de rotation qui amène A et B respectivement en coïncidence avec A′ et B′.

10. Étant donnés deux plans P et P′ et deux droites D et D′ situées respectivement dans ces plans, peut-on trouver une rotation qui amène P et D en coïncidence avec P′ et D′ ?

11. Étant donnés dans un plan P deux segments égaux AB, A′B′, trouver une droite Δ perpendiculaire au plan P, telle que par une rotation autour de Δ on puisse faire coïncider A et B respectivement avec A′ et B′. Cas d'exception.

12. Étant donnés deux plans parallèles P et P′ et des segments égaux AB, A′B′ situés respectivement dans ces plans, trouver un déplacement hélicoïdal amenant le plan P sur le plan P′ et les points A et B en A′ et B′. Cas d'exception.

13. Étant donné un mouvement hélicoïdal, on considère à un même instant les vitesses de tous les points d'un plan du corps mobile : 1° démontrer qu'il existe en général un point et un seul dont la vitesse est normale au plan ; 2° trouver le lieu des points dont la vitesse est située dans le plan.

CHAPITRE V

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

107. Énoncé du problème. — Tous les problèmes qu'on peut se poser à propos de la composition des mouvements peuvent se ramener au suivant :

Étant donnés trois corps solides A, B, C, *on connaît le mouvement de* B *par rapport à* A *et le mouvement de* C *par rapport à* B ; *trouver le mouvement de* C *par rapport à* A.

Au point de vue de l'observateur qui est fixe par rapport au corps A, ces mouvements ont reçu les noms suivants : le mouvement de B par rapport à A est le *mouvement d'entraînement* ; le mouvement de C par rapport à B est le *mouvement relatif* ; le mouvement de C par rapport à A est le *mouvement résultant* ou le *mouvement composé*.

Exemples :

1° Imaginons un bateau mobile sur un canal, une petite voiture qui se déplace sur le pont du bateau ; par rapport à un observateur placé sur la rive, le mouvement du bateau par rapport au rivage est le mouvement d'entraînement, le mouvement de la voiture par rapport au bateau, c'est-à-dire le mouvement tel que l'observerait un observateur fixe sur le bateau, est le mouvement relatif, enfin le mouvement de la voiture par rapport à l'observateur placé sur la rive est le mouvement résultant.

2° Considérons un observateur placé sur une route et regardant passer une voiture ; la voiture a un certain mouvement par

rapport à cet observateur; les roues de la voiture ont, par rapport à la voiture, un mouvement de rotation autour des essieux; connaissant le mouvement de la voiture et le mouvement de rotation de la roue autour des essieux, on peut chercher le mouvement de la roue par rapport à l'observateur qui est sur la route. En se plaçant à ce point de vue, le mouvement de la voiture par rapport à l'observateur qui est sur la route est le mouvement d'entraînement; le mouvement de rotation de la roue par rapport à la voiture est le mouvement relatif; enfin, le mouvement de la roue par rapport à l'observateur qui est sur la route est le mouvement résultant.

108. Remarque I. — On peut se poser un problème plus général en apparence que le problème du n° précédent:

Étant donné un nombre quelconque de corps solides A, B, C, D, E, *on connaît les mouvements de* B *par rapport à* A, *de* C *par rapport à* B, *de* D *par rapport à* C, *de* E *par rapport à* D; *trouver le mouvement de* E *par rapport à* A.

Ce problème se ramène immédiatement au précédent; en effet, si l'on connaît les mouvements de B par rapport à A et de C par rapport à B, la solution du problème précédent permet de connaître le mouvement de C par rapport à A; connaissant le mouvement de C par rapport à A et de D par rapport à C, on aura par la résolution du même problème le mouvement de D par rapport à A; enfin, du mouvement de D par rapport à A et de celui de E par rapport à D, on déduit de même celui de E par rapport à A.

On dit, dans cet exemple, que le mouvement de E par rapport à A est le mouvement résultant des mouvements de B par rapport à A, de C par rapport à B, de D par rapport à C et enfin de E par rapport à D.

109. Remarque II. — Dans le problème posé n° 107, il y a lieu de considérer un cas particulier intéressant: c'est celui où le corps C est en repos par rapport au corps A; le mouvement résultant est alors le repos. Au point de vue cinématique il n'y a plus que deux mouvements à considérer: le mouvement de B

par rapport à A et le mouvement de A par rapport à B. Les deux mouvements sont appelés *inverses.*

EXEMPLE :

Considérons un train en marche et des arbres placés le long de la voie ; il y a lieu de considérer les deux mouvements suivants : le mouvement du train par rapport aux arbres et le mouvement des arbres par rapport au train ; ces deux mouvements sont inverses.

110. Définitions. — Considérons trois corps solides A, B, C ; soient M un point du corps C dans la position qu'il occupe à l'instant t, μ un point fixe par rapport au corps B coïncidant à l'instant t avec le point M ; la vitesse du point M dans le mouvement de C par rapport à B s'appelle la *vitesse relative ;* la vitesse du point μ dans le mouvement de B par rapport à A est la *vitesse d'entraînement ;* enfin la vitesse du point M dans le mouvement de C par rapport à A est la *vitesse résultante.*

EXEMPLE :

Considérons un bateau qui se meut sur un canal et une bille qui se déplace sur le pont du bateau ; soit à un instant quelconque M la position de la bille ; marquons à la craie sur le pont du bateau la position μ qu'occupe la bille à cet instant. La vitesse du point M par rapport à un observateur fixe sur le bateau est la vitesse relative de M ; la vitesse du point μ par rapport à l'observateur qui est sur la rive est la vitesse d'entraînement du point M ; enfin la vitesse du point M par rapport à ce même observateur est la vitesse résultante du point M.

On définit de même l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et enfin l'accélération résultante.

La courbe décrite par le point M dans le mouvement de C par rapport à B s'appelle la *trajectoire relative ;* la courbe décrite par le point M dans le mouvement de C par rapport à A est la *trajectoire du mouvement résultant.*

111. Théorème. — *La vitesse résultante d'un point est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative de ce point.*

Marquons les positions B et B′ du corps mobile aux instants t et $t+h$ (*fig.* 41), et les trajectoires relatives C et C′ du point M, dans la position qu'elles occupent à ces instants.

A l'instant t le point mobile est en M sur la trajectoire C;

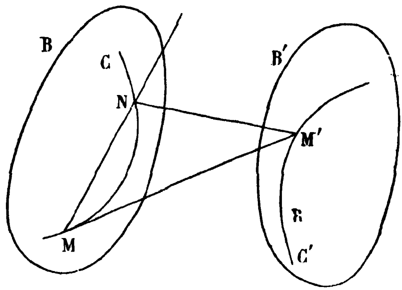


Fig. 41.

à l'instant $t+h$ il est en M′ sur la trajectoire C′; le point M′ du corps B′ a pour homologue un point N du corps B. Dans le mouvement résultant le déplacement de M entre les instants t et $t+h$ est représenté par le segment MM′; dans le mouvement relatif, c'est-à-dire dans le mouvement par rapport au corps B, le déplacement du mobile est représenté par le segment MN; enfin dans le mouvement d'entraînement du corps B le point qui occupe la position M à l'instant t vient en R à l'instant $t+h$.

Cela posé, on a l'égalité géométrique

$$(MM') = (MR) + (RM')$$

et par conséquent

$$\left(\frac{MM'}{h}\right) = \left(\frac{MR}{h}\right) + \left(\frac{RM'}{h}\right).$$

M et R sont les positions d'un même point du corps B aux instants t et $t+h$; $\frac{MR}{h}$ a donc pour limite la vitesse d'entraînement V_e du point M.

Les segments MN et RM′, qui sont homologues, ont même grandeur; les vecteurs $\frac{RM'}{h}$ et $\frac{MN}{h}$ ont donc même longueur; ils n'ont pas, en général, la même direction, mais on peut évidem-

ment supposer h assez petit pour que l'angle des segments homologues MN, RM' soit moindre que tout angle donné ; les vecteurs $\frac{RM'}{h}$ et $\frac{MN}{h}$ diffèrent d'aussi peu que l'on veut, ils ont par conséquent la même limite quand h tend vers zéro ; or, $\frac{MN}{h}$ a pour limite la vitesse relative V_r du point M.

Enfin $\frac{MM'}{h}$ a pour limite la vitesse résultante V_a du point M.

On a donc l'égalité géométrique

$$V_a = (V_e) + (V_r).$$

112. Remarque. — Si le mouvement résultant se réduit au repos, V_a est nul et par conséquent V_e et V_r sont égaux et de sens contraires ; c'est ce qui arrive si l'on considère deux mouvements inverses. Considérons, par exemple, un train mobile par rapport à la terre ; soit M un point du train qui coïncide, à l'instant t, avec un point μ de la terre ; les vitesses du point M du train, par rapport à la terre, et du point μ de la terre, par rapport au train, sont égales et opposées à l'instant t.

113. Application I. — Projection de la vitesse sur le rayon vecteur. — Soient M un mobile qui décrit une courbe C (*fig.* 42), O un point fixe, OL la demi-droite issue de O allant au point M ; cette demi-droite OL est le *rayon vecteur* du point M ; si le mouvement du point M est connu, la longueur ρ de OM sera une fonction donnée du temps. Je me propose de trouver la projection de la vitesse du point M sur le rayon vecteur OL. Pour cela, je considère le mouvement du point M comme un mouvement composé : le mouvement d'entraînement étant le mouvement que prend la droite OL et le mouvement relatif un mouvement rectiligne sur OL.

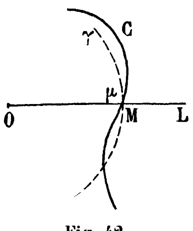


Fig. 42.

Dans le mouvement d'entraînement, le point μ de la droite OL qui coïncide à l'instant t avec le point M décrit une courbe γ tracée sur une sphère de centre O et de rayon ρ ; la tangente à cette courbe étant perpendiculaire à OM, on voit que

la vitesse d'entraînement du point M est normale au rayon vecteur.

Le mouvement relatif étant le mouvement du point M sur la droite OL, la vitesse relative est dirigée suivant OL et égale à $\frac{d\rho}{dt}$.

La vitesse résultante étant la somme géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative, la projection de la vitesse résultante sur un axe est égale à la somme algébrique des projections de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative sur le même axe. Projetons sur la droite OL; la projection de la vitesse d'entraînement est nulle, celle de la vitesse relative est $\frac{d\rho}{dt}$, donc:

La projection de la vitesse du point M *sur le rayon vecteur est égale à* $\frac{d\rho}{dt}$.

Ce résultat a été établi directement au n° 55 dans le cas où la trajectoire du point M est une courbe plane.

114. Application II. — Projection de l'accélération sur la tangente. — La projection de l'accélération sur la tangente est égale (56 et 57) à la projection de la vitesse de l'hodographe sur son rayon vecteur; le rayon vecteur de l'hodographe étant égal à v, la projection de l'accélération sur la tangente est $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{d^2s}{dt^2}$

Pour que la projection de l'accélération sur la tangente soit nulle, il faut et il suffit que $\frac{dv}{dt}$ soit nul, c'est-à-dire que v soit constant; donc:

Pour que l'accélération d'un point soit constamment normale à la trajectoire de ce point, il faut et il suffit que la vitesse de ce point soit constante.

Ce résultat a été établi directement n° 64.

115. Composition de deux mouvements de translation. — Théorème. — *Si le mouvement d'entraînement et le mouvement*

relatif sont des mouvements de translation, il en est de même du mouvement résultant.

En effet, soient A, B, C les corps solides en mouvement, M et N deux points quelconques du corps C (*fig.* 43); le mouve-

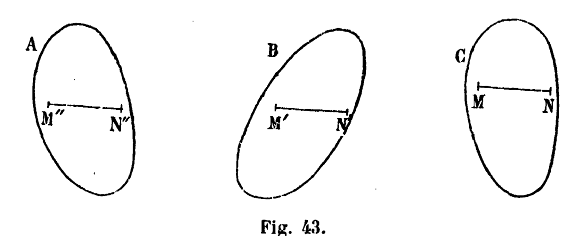


Fig. 43.

ment relatif, c'est-à-dire le mouvement de C par rapport à B, étant un mouvement de translation, le segment MN reste constamment équipollent à un segment M′N′ fixe par rapport au corps B.

Le mouvement d'entraînement, c'est-à-dire le mouvement de B par rapport à A, étant aussi un mouvement de translation, le segment M′N′ reste constamment équipollent à un segment M″N″ fixe par rapport à A ; MN reste donc équipollent à M″N″. Tout segment de C restant équipollent à un segment fixe de A, le mouvement de C par rapport à A, c'est-à-dire le mouvement résultant, est un mouvement de translation.

Le mouvement de C par rapport à B étant un mouvement de translation, les vitesses de tous les points de C ont, au même instant, la même grandeur géométrique ; la vitesse relative est donc égale à la vitesse de translation de C par rapport à B ; nous l'appellerons la *vitesse relative de translation.* On voit de même que la vitesse d'entraînement de tous les points de B est égale à la vitesse de translation de B par rapport à A. Nous appellerons cette vitesse la *vitesse d'entraînement* de translation ; enfin la vitesse de translation dans le mouvement de C par rapport à A sera appelée *vitesse résultante de translation.* Le théorème du nº 111 permet alors d'énoncer le résultat suivant :

La vitesse résultante de translation est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement de translation et de la vitesse relative de translation.

Il est facile de construire la trajectoire résultante d'un point quelconque M du corps C; soient, en effet, B_0 la position qu'occupe relativement au corps A le solide B à l'instant initial t_0, B la position de ce corps à l'instant t, M_0 la position du point M à l'instant t_0, M sa position à l'instant t, N_0 le point du corps B_0 qui coïncide à l'instant initial avec M_0 (*fig.* **44**).

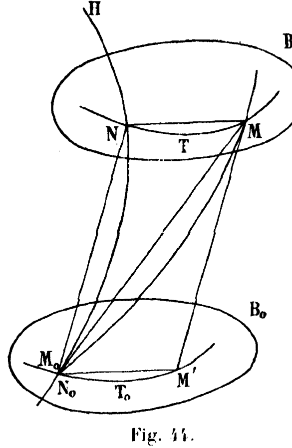


Fig. 44.

Pour définir le mouvement de translation de B par rapport à A, il suffit de se donner le mouvement du point N_0 de ce corps; ce point décrit une trajectoire H et vient en N à l'instant t.

Pour définir le mouvement du point M par rapport au corps B, on se donnera la trajectoire relative de ce point; cette trajectoire relative occupe, par rapport au corps A, la position T_0 à l'instant initial et la position T à l'instant t; par rapport au corps B_0, le point mobile sera à l'instant t en M' sur la trajectoire T_0, et quand B_0 vient occuper la position B le mobile vient en M sur la trajectoire T. Le mouvement d'entraînement étant un mouvement de translation, les droites M_0M' et NM sont équipollentes. Le déplacement résultant M_0M est donc la somme géométrique du déplacement d'entraînement M_0N et du déplacement relatif M_0M'.

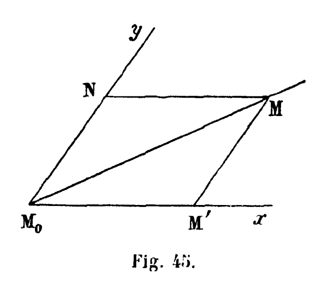


Fig. 45.

Exemples :

1° Le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif sont des mouvements rectilignes et uniformes.

La trajectoire T_0 est une droite M_0x et la trajectoire H une

droite M_0y (*fig.* 45); le point M est le sommet d'un parallélogramme dont les côtés M_0M', M_0N sont situés sur Ox et Oy et ont pour longueurs

$$M_0M' = a(t - t_0), \qquad M_0N = b(t - t_0),$$

b étant la vitesse d'entraînement et a la vitesse relative.

Le rapport

$$\frac{M'M}{M_0M'}$$

est égal à $\frac{b}{a}$, par conséquent le point M décrit une droite. La vitesse de M, étant la somme géométrique des vitesses a et b, est constante; donc:

Le mouvement résultant est rectiligne et uniforme.

2° Le mouvement d'entraînement est rectiligne et uniformément varié; le mouvement relatif est rectiligne et uniforme.

Soient M_0x, M_0y les trajectoires relative et d'entraînement; le point M est encore le sommet du parallélogramme M_0NMM' dont les côtés sont situés sur Ox et Oy et ont pour longueurs

$$M_0M' = a + bt, \qquad M_0N = p + qt + rt^2.$$

On démontre que le point M décrit une parabole.

116. *Cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation.* — Supposons que le corps mobile B soit animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ (*fig.* 46); soient B_0 la position initiale de ce corps, T_0 la trajectoire relative d'un point M mobile par rapport au corps B; à l'instant t la trajectoire T_0 vient occuper, par rapport au corps A, la position T; on obtient cette trajectoire T en faisant tourner T_0 autour de l'axe d'un angle égal à l'angle dont a tourné le solide B autour de l'axe; par rapport au corps solide B_0 le point mobile occupe à l'instant initial la position

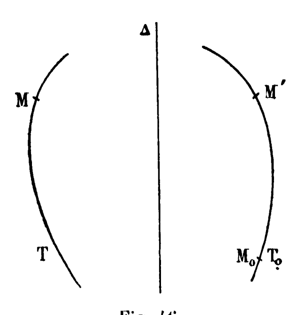


Fig. 46.

M_0 et à l'instant t la position M'; la position M du mobile par rapport au corps A s'obtiendra en faisant tourner M' autour de l'axe d'un angle égal à l'angle dont a tourné le solide B.

Supposons, en particulier, que le mouvement de rotation soit uniforme et que le mouvement relatif soit un mouvement de translation uniforme parallèle à l'axe. Les trajectoires T_0 et T sont des droites parallèles à l'axe Δ (*fig.* 47); abaissons des points M_0, M', M les perpendiculaires M_0P_0, $M'P$, MP sur l'axe.

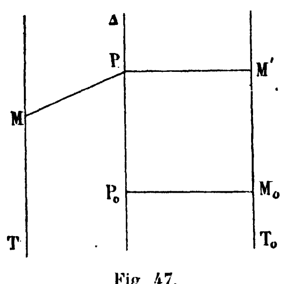


Fig. 47.

M_0M' et par suite P_0P varient proportionnellement au temps, l'angle dièdre $M_0\Delta M$ varie aussi proportionnellement au temps. On voit donc que pour obtenir la position du corps C il faut faire glisser chaque point M du corps C parallèlement à l'axe d'une longueur P_0P proportionnelle au temps, puis le faire tourner autour de l'axe d'un angle $M'PM$ proportionnel au temps. Le mouvement résultant est donc un mouvement hélicoïdal (100).

En appliquant à cet exemple le théorème de la composition des vitesses, on trouve le résultat établi directement (106) pour la vitesse d'un point dans le mouvement hélicoïdal d'un corps solide.

EXERCICES

1. Le mouvement inverse d'un mouvement de translation est un mouvement de translation.

2. Le mouvement inverse d'un mouvement de rotation est un mouvement de rotation.

3. Le mouvement inverse d'un mouvement hélicoïdal est un mouvement hélicoïdal.

4. Un point se meut sur une ellipse suivant une loi quelconque; démontrer que les projections de la vitesse sur les rayons vecteurs issus des foyers sont égales et de signes contraires.

En déduire la construction de la tangente à l'ellipse.

5. Problème analogue pour l'hyperbole.

6. Démontrer, par la théorie de la composition des mouvements, que si l'on projette un point mobile sur un axe, la vitesse de la projection est égale à la projection de la vitesse du mobile sur le même axe.

7. Même question pour les accélérations.

8. Accélération dans un mouvement circulaire quelconque.

9. Soient a et b deux droites parallèles fixes par rapport à un corps A ; on fait tourner un corps solide B d'un angle α autour de la droite a, ce qui amène B en B_1 ; puis on fait tourner B_1 d'un angle β autour de la droite b, ce qui amène B_1 en B_2 ; montrer qu'on peut, en général, faire coïncider B avec B_2 par une rotation.

10. Démontrer, par la théorie de la composition des mouvements, que si A et B sont deux points d'un corps solide mobile, les projections des vitesses de A et de B sur la droite AB sont égales.

11. Un corps solide B est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un corps A ; un corps C est animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport au corps B. Trouver le mouvement de C par rapport à A ; construire la tangente à la trajectoire d'un point quelconque M du corps C dans son mouvement par rapport à A. Examiner le cas où l'axe de rotation est perpendiculaire à la vitesse de translation.

12. Même problème en supposant que le mouvement de translation du corps solide B soit un mouvement circulaire uniforme.

13. Un cercle roule sur une droite ; démontrer que le mouvement que prend un point M de ce cercle peut être considéré comme le mouvement résultant d'un mouvement d'entraînement de translation et d'un mouvement relatif de rotation. En déduire la construction de la tangente à la trajectoire du point M.

14. Problème analogue en faisant rouler le cercle sur un autre cercle.

15. Le mouvement de B par rapport à A est un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe D fixe par rapport à A ; le mouvement de C par rapport à B est un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe Δ fixe par rapport à B. Trouver le mouvement de C par rapport à A en supposant que D et Δ sont parallèles. Examiner le cas où les vitesses de rotation sont égales et de signes contraires.

DYNAMIQUE ET STATIQUE

CHAPITRE VI

NOTIONS FONDAMENTALES

§ I.

Les principes de la Mécanique.

117. Les principes sur lesquels repose la Mécanique ne doivent pas être considérés comme des axiomes ; ils sont loin d'être évidents ; ils se justifient, *a posteriori,* par l'accord qui existe entre les conséquences qu'on en déduit et les faits observés.

Ces principes sont au nombre de trois : 1° le principe de l'inertie ; 2° le principe de Galilée ; 3° le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

118. Principe de l'inertie. — Ce principe comprend deux parties :

1° *Quand un point matériel est en repos, si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui, il reste en repos.*

2° *Quand un point matériel est en mouvement, si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui, son mouvement est rectiligne et uniforme.*

119. Il résulte de ce principe que si un point passe de l'état de repos à l'état de mouvement, ou encore que si le mouvement

d'un point n'est pas rectiligne et uniforme, il y a des actions extérieures qui agissent sur ce point. On donne le nom de *force* à toute action extérieure capable de mettre en mouvement un point au repos ou encore de modifier le mouvement de ce point en changeant la grandeur ou le sens de sa vitesse.

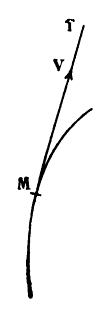


Fig. 48.

Considérons un mobile en mouvement; soient M (*fig.* 48) sa position à l'instant t, MV sa vitesse qui est dirigée suivant la tangente MT à sa trajectoire; à cet instant supprimons toutes les forces qui agissent sur M, le mouvement ultérieur sera rectiligne et uniforme; comme la vitesse ne peut pas varier brusquement, la vitesse de ce mouvement rectiligne uniforme sera MV; par conséquent, le mobile va se mouvoir sur la tangente MT à la trajectoire.

120. Définition dynamique de la force. — Soient M un point en mouvement, $M\gamma$ son accélération à un instant quelconque (*fig.* 49); nous admettrons que la force F qui produit le mouvement du point M est représentée à cet instant par un vecteur ayant pour origine M, pour direction $M\gamma$ et pour longueur le produit de $M\gamma$ par un coefficient qui ne dépend que de la nature du point M et qu'on appelle *masse* de ce point. On exprime ce fait d'une façon abrégée en disant que la force est le produit géométrique de l'accélération par la masse.

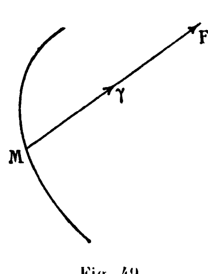


Fig. 49.

121. Remarque. — On voit facilement que cette définition dynamique de la force entraîne comme conséquence les deux propositions du principe de l'inertie.

122. Invariabilité de la masse. — La masse d'un point matériel reste *invariable,* c'est-à-dire qu'elle est la même à deux instants quelconques et qu'elle reste encore la même si l'on déplace le point.

123. Poids d'un corps. — Lorsqu'on abandonne un corps à lui-même dans le vide, il tombe suivant la verticale et son mouvement est uniformément varié. L'accélération de ce mouvement est ce qu'on appelle en physique l'*intensité de la pesanteur;* on la désigne par la lettre g.

L'accélération dans ce mouvement étant constante, la force qui produit le mouvement est aussi constante. Cette force constante est ce qu'on appelle le *poids* du point matériel. En désignant par P le poids, par m la masse du corps, par g l'intensité de la pesanteur, on aura (120)

$$P = mg.$$

124. Remarque. — Quand on se déplace à la surface de la Terre, g varie ; il décroît quand on va du pôle à l'équateur ; m reste fixe, donc P varie ; P décroît quand on va du pôle à l'équateur.

125. Mesure pratique des masses. — Soient A et B deux corps, m et m' leurs masses, P et P' leurs poids. Des formules

$$P = mg, \qquad P' = m'g,$$

on déduit

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'};$$

donc :

Le rapport des masses de deux corps est égal au rapport de leurs poids en un même lieu.

Ce théorème montre que le rapport des poids de deux corps ne change pas quand on se déplace à la surface du globe. Si, par exemple, dans une balance, un corps fait équilibre à un poids marqué 2^{kg}, la même propriété subsistera en quelque lieu que l'on fasse la pesée.

On voit en outre que

Si l'on prend pour unité de masse la masse d'un corps B, *le nombre qui mesure la masse d'un corps* A *est égal au quotient du poids des corps* A *et* B.

Cette propriété permet dans la pratique de mesurer la masse d'un corps à l'aide de la balance.

126. Principe de Galilée. — Nous énoncerons le principe de Galilée sous la forme suivante :

Deux forces agissant simultanément sur un même point matériel produisent le même effet qu'une force unique égale à leur somme géométrique.

Ce principe s'appelle aussi le *principe de l'indépendance des effets des forces.*

127. Résultante de deux forces. — Soient M un point matériel soumis à l'action de deux forces F et F′ (*fig.* 50) et R la somme géométrique de ces forces ; la force R produira le même effet que les deux forces F et F′ ; pour cette raison, on dit que R est la *résultante* des forces F et F′ ; on dit aussi que F et F′ sont les *composantes* de R.

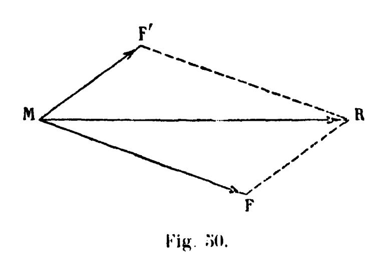


Fig. 50.

128. Résultante d'un nombre quelconque de forces. — Le résultat admis (126) pour deux forces s'étend successivement à trois, quatre,..., à un nombre quelconque de forces. On peut donc dire :

Un nombre quelconque de forces agissant simultanément sur un même point matériel produisent le même effet qu'une force unique égale à leur somme géométrique.

Cette force unique est la *résultante* des forces primitives. On dit aussi que les forces primitives sont les *composantes* de cette résultante.

129. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Le principe s'énonce ainsi :

Si un point A *agit sur un point* B, *cette action est une force appliquée en* B *et dirigée suivant la droite* AB ; *de plus, l'action de* B *sur* A (qu'on appelle la réaction) *est une force égale et opposée à la précédente.*

§ II.

Unités.

130. Remarques sur le choix des unités. — En principe, l'unité qui sert à mesurer une grandeur peut être choisie arbitrairement ; mais il y a à cet égard un certain nombre de conventions qui sont admises par tout le monde ; si l'on rejetait ces conventions, il faudrait modifier les formules dont nous avons l'habitude de nous servir.

Tout d'abord, on a fixé une fois pour toutes l'unité d'angle. L'angle unité est l'angle au centre qui intercepte un arc égal au rayon ; toutes les formules théoriques supposent ce choix de l'unité d'angle. (Cela n'empêche nullement d'évaluer ensuite, si l'on veut, les angles en degrés ou en grades.)

D'autre part, la mesure de certaines grandeurs peut se ramener à celle de grandeurs d'une autre nature. Les premières grandeurs sont appelées *dérivées* ; les autres sont *fondamentales*. L'unité qui sert à mesurer une grandeur dérivée est liée à celles qui servent à mesurer les grandeurs fondamentales. Ainsi, en géométrie, l'unité de surface est l'aire du carré qui a pour côté l'unité de longueur. C'est là, bien entendu, une convention ; on aurait pu prendre pour unité d'aire, par exemple, l'aire du triangle équilatéral qui a pour côté l'unité de longueur ; mais alors, il faudrait modifier l'énoncé du théorème qui donne l'aire d'un rectangle.

Toutes les grandeurs que l'on rencontre en Mécanique peuvent être mesurées quand on a mesuré les longueurs, les temps, les masses et les forces. De plus, la formule

$$F = m\gamma$$

permet de mesurer une de ces grandeurs quand on sait mesurer les trois autres. Il n'y a donc, en réalité, que *trois grandeurs fondamentales* ; toutes les autres sont des grandeurs dérivées. Nous prendrons comme grandeurs fondamentales trois quelconques des quatre grandeurs : longueur, temps, force, masse ; la quatrième sera une grandeur dérivée.

131. Système mètre, seconde, kilogramme. — Dans un premier système, qui est encore assez usité, on a choisi comme unités

Pour les longueurs,	. .	le mètre ;
— — temps,	. . .	la seconde ;
— — forces,	. . .	le kilogramme-poids.

Le kilogramme-poids est le poids, à Paris, de l'étalon en platine iridié déposé au Bureau international des Poids et Mesures. (Il dépasse de 27 milligrammes le poids d'un décimètre cube d'eau à 4°.)

Cherchons quelle est dans ce système l'unité de masse. Entre le poids P d'un corps et sa masse M existe la relation

$$P = M . G.$$

Pour que $M = 1$, il faut supposer $P = G$. L'unité de masse est par suite la masse, à Paris, de G kilogrammes-poids.

132. Unités absolues. — Pour définir le système précédent, il faut indiquer le point de la surface du globe où l'on prend l'unité de poids. Gauss a remarqué que cet inconvénient n'existe pas si l'on choisit comme grandeurs fondamentales les longueurs, les temps et les masses. Tout système d'unités basé sur ce principe est un système d'unités absolues.

Système C. G. S. — Dans ce système on choisit comme unités

Pour les longueurs,	. .	le centimètre ;
— — temps,	. . .	la seconde ;
— — masses,	. . .	le gramme-masse.

Le gramme-masse est la millième partie de la masse du kilogramme étalon.

Dans ce système, l'unité de force est une unité dérivée. La formule fondamentale

$$F = m\gamma$$

montre que si l'on a $m = 1$, $\gamma = 1$, F est égal à 1. Cette unité s'appelle la dyne.

La dyne est donc la force qui, appliquée à une masse de 1 gramme, lui imprime une accélération de 1 centimètre par seconde,

Nous verrons (135) le rapport entre la dyne et le kilogramme-poids.

Système industriel M. T. S. — A côté du système C. G. S. il y a lieu d'indiquer le système industriel M. T. S., rendu légal par la loi du 2 avril 1929. Dans ce système on choisit comme unités

Pour les longueurs,	. . .	le mètre ;
— — temps,	. . . .	la seconde ;
— — masses,	. . . .	la tonne, qui vaut 1000

kilogrammes-masse.

L'unité de forces est le *sthène,* force qui imprime à une masse d'une tonne une accélération d'un mètre par seconde.

133. Remarques sur la mesure des grandeurs. — On sait que si A, B, C sont trois grandeurs de même espèce on a, entre les rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{A}{B}$, l'égalité

$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} ;$$

$\frac{A}{C}$ est le nombre qui mesure A quand on prend C pour unité ;

$\frac{A}{B}$ — — A — B —

$\frac{B}{C}$ — — B — C —

Cette formule indique comment varie le nombre qui mesure une même grandeur A quand on change l'unité ; on voit que pour passer de la mesure avec l'unité B à la mesure avec l'unité C, il faut multiplier le premier nombre par le rapport $\frac{B}{C}$, ce qu'on peut énoncer sous la forme abrégée suivante :

Si l'unité devient k fois plus petite, le nombre qui mesure la grandeur devient k fois plus grand.

Ainsi, par exemple, si l'on mesure une même longueur en prenant d'abord comme unité le mètre, ensuite comme unité le centimètre, le nombre qui provient de la seconde mesure est 100 fois plus grand que celui qui provient de la première.

134. Théorie des changements d'unités. — Considérons deux systèmes quelconques d'unités ; on passera du premier au second en rendant l'unité de longueur λ fois plus petite, l'unité de temps τ fois plus petite, l'unité de masse μ fois plus petite et enfin l'unité de force φ fois plus petite. Comme trois des unités déterminent la quatrième; trois des nombres λ, μ, τ, φ déterminent le quatrième ; il y a donc une relation entre ces quatre nombres ; c'est cette relation que je me propose de trouver.

Je désignerai par une même lettre, non accentuée pour le premier système et accentuée pour le second, les deux mesures d'une même grandeur dans les deux systèmes d'unités ; ainsi, par exemple, l sera le nombre qui mesure une longueur dans le premier système, l' sera le nombre qui mesurera la même longueur dans le second système. D'après le paragraphe précédent, on aura

$$l' = l\lambda ;$$

de même, si t et t' sont les deux nombres qui mesurent une même durée, m et m' les deux mesures d'une même masse, F et F′, d'une même force, on aura

$$t' = t\tau, \qquad m' = m\mu, \qquad F' = F\varphi.$$

Considérons un mouvement rectiligne quelconque; soient v et v' les nombres qui mesurent la vitesse dans les deux systèmes d'unités; on a

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad v' = \frac{dx'}{dt'}.$$

Mais dx, dx' sont les deux mesures d'une même longueur ; dt, dt' les deux mesures d'une même durée ; par conséquent,

$$dx' = \lambda dx, \qquad dt' = \tau dt ;$$

on en déduit

$$v' = \frac{\lambda}{\tau} \times v.$$

Si on désigne de même par γ et γ' les deux nombres qui mesurent l'accélération de ce mouvement, on aura

$$\gamma = \frac{dv}{dt}, \qquad \gamma' = \frac{dv'}{dt'}.$$

Mais la formule précédente donne

$$dv' = \frac{\lambda}{\tau} \times dv\,;$$

on aura donc

$$\gamma' = \frac{\lambda}{\tau^2} \times \gamma.$$

Cela posé, imaginons une force agissant sur un mobile ; elle lui imprime une certaine accélération. Désignons par F, m, γ les nombres qui mesurent la force, la masse et l'accélération dans le premier système ; par F', m', γ' les nombres qui mesurent les mêmes grandeurs dans le deuxième système. On devra avoir

(1) $$F = m\gamma, \qquad F' = m'\gamma'.$$

Remplaçons F', m', γ' par leurs valeurs ; on a

(2) $$F \times \varphi = m \times \mu \times \gamma \times \frac{\lambda}{\tau^2}.$$

Des formules (1) et (2), on déduit

(3) $$\varphi = \frac{\mu\lambda}{\tau^2}.$$

C'est la relation demandée entre les quatre nombres λ, τ, μ, φ.

135. Rapport entre le kilogramme et la dyne. — Pour passer du système mètre-seconde-kilogramme au système C. G. S., il faut supposer $\lambda = 100$, puisque la première unité de longueur est le mètre et la seconde le centimètre ; il faut faire $\tau = 1$, puisque l'unité de temps n'a pas changé. Enfin, dans le premier système, la masse unité est la masse de G kilogrammes ; dans le second, c'est celle du gramme ; il faut donc supposer $\mu = 1\,000$ G ; d'où l'on déduit

$$\varphi = 1\,000\ G \times 100 = 100\,000\ G\,;$$

$\varphi = 980\,000$ environ.

Ainsi, la dyne est presque un million de fois plus petite que le kilogramme ; elle diffère très peu du poids de 1 milligramme.

136. Unités dérivées. — Nous allons indiquer rapidement comment on fait les changements d'unités pour les grandeurs dérivées.

Surfaces. — Une surface est le produit de deux longueurs (ou plutôt toute surface se décompose en parties possédant cette propriété). Il en résulte qu'entre les deux mesures S et S′ d'une même surface existe la relation

$$S' = S \times \lambda^2.$$

Volumes. — On voit de même que si V et V′ sont les deux mesures d'un même volume, on a

$$V' = V \times \lambda^3.$$

Pressions. — On définit une pression par le quotient d'une force par une surface ; si P et P′ sont les deux mesures d'une pression, on a

$$P' = \frac{F'}{S'}, \qquad P = \frac{F}{S},$$

F et F′ étant les deux mesures d'une même force. S et S′ les deux mesures d'une même surface. En remplaçant, on aura

$$P' = P \times \frac{\varphi}{\lambda^2} = P \times \frac{\mu}{\lambda\tau^2}.$$

Masse spécifique. — Une masse spécifique est égale au quotient d'une masse par un volume. En désignant par m, m' les deux nombres qui mesurent une même masse spécifique, on aura

$$m' = \frac{M'}{V'} \qquad m = \frac{M}{V},$$

d'où

$$m' = m \frac{\mu}{\lambda^3}.$$

Travail. — Un travail est le produit d'une force par une longueur ; si T et T′ sont les deux mesures d'un même travail, on aura

$$T' = F' \times l', \qquad T = F \times l,$$

d'où

$$T' = T \times \varphi\lambda = T \times \frac{\lambda^2\mu}{\tau^2}.$$

EXERCICES

1. A Paris, dans le système C. G. S., l'intensité g de la pesanteur est 981. Quelle est la valeur de g si l'on prend pour unité de longueur le kilomètre et pour unité de temps la minute ?

2. Quelle unité de longueur faut-il adopter si l'on prend comme unité de temps la minute, comme unité de masse la masse-gramme et comme unité de force le poids de cette masse à Paris?

3. En choisissant les unités indiquées dans le problème précédent, quel est le nombre qui mesure la pression atmosphérique normale?

4. D'après la loi de Newton, deux points matériels M et M′, de masses m et m', situés à une distance r, s'attirent; la force d'attraction F est donnée par la formule

$$F = k\frac{mm'}{r^2},$$

k étant un coefficient; comment varie ce coefficient quand on fait un changement d'unités?

5. On prend comme unité de longueur le centimètre, comme unité de temps la seconde; comment faut-il choisir les autres unités pour que le coefficient k (4) se réduise à l'unité? On admettra que

$$k = \frac{0{,}676 \times g^2}{10^{14}},$$

en prenant comme unités fondamentales le mètre, la seconde, le gramme-force.

6. La vitesse du son dans un gaz est donnée par la formule

$$v = k\sqrt{\frac{P}{m}};$$

k est une constante absolue, indépendante du choix des unités, P la pression, m la masse spécifique du gaz; vérifier que si l'on fait un changement d'unités, les deux membres sont multipliés par le même facteur.

7. La vitesse v acquise par un corps pesant abandonné à lui-même et tombant d'une hauteur h est donnée par la formule

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Vérifier que les deux membres de cette formule sont multipliés par un même facteur quand on fait un changement d'unités.

8. Même vérification pour la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

qui donne la durée des petites oscillations d'un pendule.

CHAPITRE VII

STATIQUE DU POINT MATÉRIEL

137. Définitions. — Nous savons que tout corps matériel peut être considéré comme formé de points matériels ; à chacun de ces points matériels ou à quelques-uns d'entre eux seulement appliquons une ou plusieurs forces ; on a ainsi un *système de forces appliquées à un corps matériel.*

On dit qu'un corps matériel est en *équilibre* sous l'action d'un système de forces lorsque, le corps matériel étant supposé au repos, il reste au repos quand les forces du système agissent sur lui.

La science qui recherche les conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps matériel se nomme la *statique.* La science qui recherche le mouvement que prend un corps matériel soumis à l'action d'un système de forces données se nomme la *dynamique.*

Nous n'étudierons ici que deux espèces de corps matériels : 1° le point matériel ; 2° le corps solide et les ensembles de corps solides.

§ I.

Point matériel complètement libre.

138. Remarque. — Je rappelle que si les forces F_1, F_2, ..., F_n agissent simultanément sur un point matériel, *libre* ou *gêné*, elles produisent le même effet qu'une force unique R qu'on appelle leur résultante ; les forces F_1, F_2, ..., F_n sont appelées

les composantes de R. Enfin, le vecteur qui représente la force R est la somme géométrique des vecteurs qui représentent les forces F_1, F_2, ..., F_n (128).

Dans ce qui suit, nous appellerons *projection d'une force sur un axe, moment d'une force par rapport à un axe, moment d'une force par rapport à un point,* les expressions analogues qui ont été définies pour le vecteur qui représente la force (Théorie des vecteurs).

139. Théorème. — *Pour qu'un système de forces appliquées à un point matériel complètement libre soit en équilibre, il faut et il suffit que leur résultante soit nulle.*

Puisque les forces qui agissent sur le point produisent le même effet que leur résultante, si la résultante est nulle, on est placé dans les mêmes conditions que si aucune force n'agissait sur le point; par conséquent, si le point est primitivement au repos, il reste au repos (principe de l'inertie, 118); il y a équilibre, donc la condition est suffisante.

Si, au contraire, la résultante n'est pas nulle, le point primitivement au repos va se mouvoir dans la direction de cette résultante; il n'y a pas équilibre, donc la condition est nécessaire.

140. Expression analytique des conditions d'équilibre. — Par le point matériel O, menons trois axes $x'x$, $y'y$, $z'z$ non situés dans un même plan; désignons par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force F_1, par X_2, Y_2, Z_2 celles de la force F_2, etc., par X_n, Y_n, Z_n celles de la force F_n. Pour que la résultante soit nulle, il faut et il suffit (Théorie des vecteurs) que

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0,$$
$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = 0.$$

Ces équations donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point soit en équilibre.

141. Systèmes équivalents. — Deux systèmes de forces appliquées à un point matériel sont dits *équivalents* quand ils pro-

duisent le même effet sur ce point. Comme chaque système de forces produit le même effet que sa résultante, on voit que

Pour que deux systèmes de forces appliquées à un point matériel soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient la même résultante.

142. Expression analytique de la résultante. — Soient OR la résultante des forces F_1, F_2, ..., F_n ; X, Y, Z les composantes de OR suivant les axes $x'x$, $y'y$, $z'z$. On aura (Théorie des vecteurs), en conservant les notations du n° 140,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

De là résulte la conséquence suivante :

Pour que deux systèmes de forces appliquées à un point matériel complètement libre soient équivalents, il faut et il suffit que les sommes des projections des forces de chaque système sur les axes de coordonnées soient égales.

143. Remarque. — Il résulte de ce qui précède que la théorie des forces appliquées à un point matériel est identique à la théorie des vecteurs concourants (Théorie des vecteurs).

Nous nous bornerons donc à rappeler les résultats suivants :

La projection de la résultante sur un axe est égale à la somme des projections de ses composantes sur le même axe.

Si un système de forces est en équilibre, la somme des projections de ces forces sur un axe quelconque est nulle.

Le moment de la résultante de plusieurs forces par rapport à un point est la somme géométrique des moments de toutes ces forces par rapport au même point.

Le moment de la résultante de plusieurs forces par rapport à un axe est la somme algébrique des moments de toutes ces forces par rapport au même axe.

Si l'on a une force OA *et deux droites* $x'Ox$, $y'Oy$ *situées dans un même plan avec* OA, *on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer la force* OA *en deux forces portées sur ces deux droites.*

La résultante de trois forces OA, OB, OC *non situées dans un même plan est la diagonale* OR *du parallélépipède qui a pour arêtes* OA, OB, OC.

Étant données trois droites $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ *non situées dans un même plan et une force quelconque* OA, *on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer la force* OA *en trois forces portées respectivement sur* $x'x$, $y'y$, $z'z$.

144. Problème. — *Un point* M *est soumis d'une part à l'action de la pesanteur; d'autre part, il est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à la distance. Construire la résultante de ces deux forces.*

Par le centre d'attraction O (*fig.* 51) menons la verticale Oy dirigée vers le bas; le point M est soumis à deux forces; d'une part, la force MP, égale au poids du point M, qui est parallèle à Oy; d'autre part, la forme MA qui provient de l'attraction du point O, cette force est dirigée suivant la droite MO; sa grandeur est

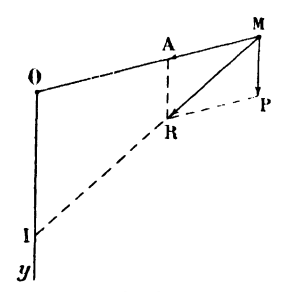


Fig. 51.

$$MA = k \cdot MO,$$

k étant le coefficient d'attraction, coefficient qui est indépendant de la position du point M. Construisons la résultante MR des forces MA et MP; soit I le point où MR rencontre Oy; les triangles semblables MAR, MOI donnent les égalités de rapport

$$\frac{MA}{MO} = \frac{AR}{OI} = \frac{MR}{MI}.$$

Le premier rapport est égal à k; AR est égal au poids P du corps M; donc

$$OI = \frac{P}{k},$$

ce qui montre que le point I reste le même quelle que soit la position du point M. On aura ensuite

$$MR = k \cdot MI.$$

La résultante MR est donc égale à la force qui agirait sur le point M s'il était attiré par le point I proportionnellement à la distance, le coefficient d'attraction étant k.

On voit que pour que MR soit nul, il faut et il suffit que le point M soit placé en I. Le point I est la position d'équilibre d'un point matériel soumis à l'action des deux forces indiquées dans l'énoncé.

§ II.

Point matériel assujetti à glisser, sans frottement, sur une courbe ou sur une surface.

145. Point assujetti à rester sur une surface. — Soient M un point assujetti à rester sur une surface S, R la résultante des forces appliquées au point M ; comme la surface oppose une certaine résistance au mouvement, le point M peut être en équilibre quand bien même R n'est pas nul. Nous admettrons, comme un fait d'expérience, que si la surface est *parfaitement polie* l'équilibre ne peut exister que si la force R est normale à la surface ; de plus, si nous supposons la surface *infiniment résistante*, l'équilibre existera sous cette condition, quelque grand que soit R. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Pour qu'un mobile assujetti à rester sur une surface parfaitement polie et infiniment résistante soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces appliquées à ce mobile soit normale à la surface.

146. Réaction. — Pression. — Soit alors M un mobile assujetti à rester sur une surface S ; s'il est en équilibre, la résultante R des forces qui lui sont appliquées est normale à la surface ; prenons la force MN égale et opposée à la force R (*fig.* 52) ; si aux forces qui agissent sur le point M on ajoute la force MN, on obtient un système de forces dont la résultante est nulle ; après l'adjonction de cette force, le point M, *même s'il était complètement libre*, serait en équilibre.

On voit donc qu'un point M, assujetti à rester sur une surface S, peut être considéré comme un point complètement libre pourvu qu'on ajoute aux forces qui lui sont directement appliquées une force MN normale à la surface S. On peut dire que cette force MN est l'effet que produit la surface sur le point; on l'appelle la *réaction* de la surface sur le point.

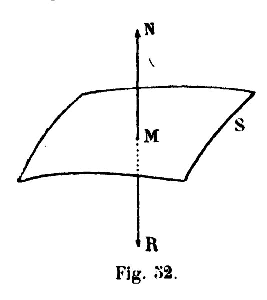


Fig. 52.

Si l'on admet que la surface S agit sur le point M, il faut admettre aussi (129) que le point M agit sur la surface ; ces deux actions devant être égales et opposées, l'action de M sur la surface est la force R ; c'est ce qu'on appelle la *pression* du point sur la surface.

147. Remarque. — Dans la plupart des cas, on peut distinguer deux côtés sur une surface ; quand on assujettit un point à rester sur une surface, on peut spécifier de quel côté de la surface il doit rester. Ainsi, si l'on a un plan horizontal, un point peut être assujetti à rester soit sur le côté haut, soit sur le côté bas du plan.

Quand il en est ainsi, l'équilibre n'existe que si la résultante est dirigée du côté opposé à celui où est placé le point ; par conséquent, la réaction doit être dirigée vers le côté où doit être placé le point.

Ainsi, si un point est assujetti à rester sur le côté haut d'un plan horizontal, il ne peut être en équilibre que si la résultante des forces qui agissent sur ce point est verticale et dirigée vers le bas.

On conçoit très bien, dans cet exemple, que si la résultante était verticale, mais dirigée vers le haut, le point devrait quitter le plan.

148. Point assujetti à rester sur une courbe. — On traite d'une façon analogue le cas d'un point assujetti à rester sur une courbe. On a, comme pour une surface, le résultat suivant :

Pour qu'un point assujetti à rester sur une courbe parfaite-

ment polie et infiniment résistante soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante R *des forces appliquées à ce point soit normale à la courbe.*

Dans ces conditions, la force égale et opposée à R s'appelle la *réaction* de la courbe sur le point; la force R est la *pression* du point sur la courbe.

149. Problème. — *Un point matériel est assujetti à rester sur un cercle* C *situé dans un plan vertical; ce point est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à la distance; trouver les positions d'équilibre.*

Par cela seul qu'on dit que le cercle C est dans un plan vertical, il faut supposer que le point M est soumis à l'action de la pesanteur. Nous avons vu (144) que la résultante des forces qui agissent sur M passe par un point fixe I; tout revient donc à mener par I une normale au cercle.

Si le point I coïncide avec le centre du cercle, le point M est en équilibre dans toutes les positions.

Dans le cas contraire, menons le diamètre qui passe par I; il coupe le cercle en deux points M et M'; ce sont les positions d'équilibre.

Supposons maintenant qu'on veuille spécifier de quel côté du cercle on place le point. Si le point I est intérieur au cercle (*fig*. 53), les points M et M' sont des positions d'équilibre quand le point est assujetti à rester à l'extérieur du cercle; dans ce cas, il n'y a pas de position d'équilibre si l'on assujettit le point M à rester à l'intérieur du cercle.

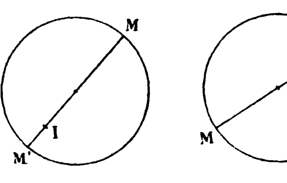


Fig. 53. Fig. 54.

Si, au contraire, le point I est extérieur au cercle, le point M qui est le plus éloigné de I (*fig*. 54) est une position d'équilibre quand le point doit être du côté extérieur du cercle; le point M' est une position d'équilibre quand on place le point sur le cercle, mais à l'intérieur.

§ III.

Point mobile avec frottement sur une courbe ou sur une surface.

150. Coefficient de frottement. — Soient M un point mobile sur une surface S, MR la résultante des forces directement appliquées au point M (*fig.* 55). Si la surface n'est pas parfaitement polie, le point M peut rester en équilibre quand bien même la résultante MR ne serait pas normale à la surface. Pour expliquer ce qui se passe dans ce cas, menons la normale MN à la surface; le plan MNR coupe le plan tangent à la surface S suivant une droite MT. On pourra décomposer la force R en deux autres; l'une, MA, dirigée suivant la normale MN, qu'on appelle la *composante normale* de la résultante MR; l'autre, MB, dirigée suivant MT, qu'on appelle la *composante tangentielle* de la force MR.

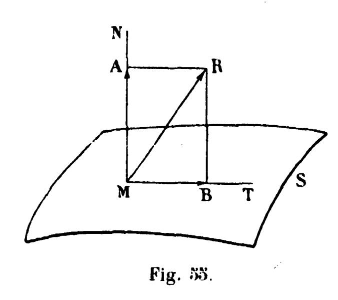


Fig. 55.

Cela posé, il résulte des expériences de Coulomb sur le frottement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre est que le rapport de la composante tangentielle à la composante normale soit plus petit qu'un nombre donné f, c'est-à-dire que l'on ait

$$MB \leqslant f \times MA.$$

Ce nombre f ne dépend que de la nature des surfaces en contact; il est, par conséquent, indépendant de la grandeur et de la direction de la force MR; ce nombre f est le *coefficient de frottement.*

151. Angle de frottement. — Désignons par φ l'angle que fait la résultante MR avec la normale MN (*fig.* 55); on aura

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MB}{MA},$$

et, par conséquent, la condition d'équilibre devient

$$\operatorname{tg} \varphi < f.$$

Désignons par α l'angle dont la tangente est égale à f; on aura

$$\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\varphi < \alpha.$$

On voit que si l'on considère le cône de révolution qui a pour axe la normale MN et α pour demi-angle au sommet, la résultante MR devra, si l'on veut que l'équilibre existe, se trouver à l'intérieur de ce cône.

Cet angle α est l'*angle de frottement.*

152. Remarque. — Ici, comme dans le cas d'une surface parfaitement polie, la force opposée à la résultante MR est la *réaction* de la surface sur le point ; la force MR est la *pression* du point sur la surface. On voit que la réaction doit faire avec la normale un angle plus petit que l'angle de frottement.

On peut aussi fixer le côté de la surface où l'on place le point. Dans ce cas, pour qu'il y ait équilibre, il faut non seulement que la résultante fasse avec la normale un angle plus petit que l'angle de frottement, mais encore qu'elle soit dirigée vers le côté opposé à celui où doit se trouver le point.

153. Point mobile sur une courbe. — On obtient des résultats analogues pour un point mobile avec frottement sur une courbe. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que le rapport entre la composante tangentielle et la composante normale de la résultante des forces appliquées au point soit plus petit que le coefficient de frottement f, ou encore que l'angle aigu que fait cette résultante avec la tangente à la courbe soit plus grand que $90° - \alpha$, α étant l'angle de frottement.

154. Problème. — *Un point pesant est mobile avec frottement sur un cercle situé dans un plan vertical; trouver les positions d'équilibre.*

Pour qu'un point pesant mobile avec frottement sur une courbe soit en équilibre, il faut et il suffit que la normale à la

courbe fasse avec la verticale un angle plus petit que l'angle de frottement α, ou, ce qui revient au même, que la tangente fasse avec l'horizon un angle plus petit que α. Soient alors A, B, C, D (*fig.* 56) les points du cercle où la tangente est inclinée d'un angle α sur l'horizon ; les points des arcs AEB, DFC sont des positions d'équilibre.

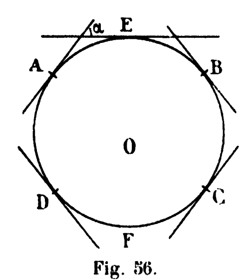


Fig. 56.

Les points de l'arc AEB sont des positions d'équilibre quand on place le point à l'extérieur du cercle ; au contraire, les points de l'arc DFC sont des positions d'équilibre quand on place le point à l'intérieur du cercle.

155. Problème. — *Un point est mobile avec frottement sur un plan incliné ; ce point est soumis, en outre, à l'action d'une force* F *dirigée suivant la ligne de plus grande pente et vers le haut. Trouver les conditions d'équilibre.*

Désignons par α (*fig.* 57) l'angle que fait le plan avec un plan horizontal ; il y a deux forces directement appliquées au point M : 1° son poids P ; 2° la force F. La force P peut être décomposée en deux autres, l'une N normale au plan, l'autre T dirigée suivant la ligne de plus grande pente vers le bas. Ces composantes ont pour grandeurs

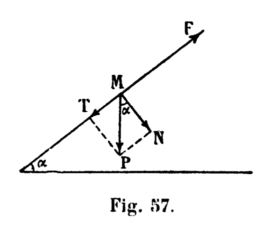


Fig. 57.

$$N = P\cos\alpha, \qquad T = P\sin\alpha.$$

En composant les forces P et F, on réduit le système des forces à deux : 1° une force normale au plan, égale à $P\cos\alpha$; 2° une force dirigée suivant la ligne de plus grande pente, égale à la valeur absolue de $F - P\sin\alpha$. Pour que l'équilibre existe, il faut et il suffit que cette composante soit plus petite que la première multipliée par le coefficient de frottement f ; on devra donc avoir

$$-fP\cos\alpha < F - P\sin\alpha < fP\cos\alpha,$$

d'où l'on déduit les deux conditions

$$(1) \qquad F > P(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$
$$(2) \qquad F < P(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Discussion. — Nous distinguerons deux cas :

1° $\operatorname{tg} \alpha < f$. Le second membre de l'inégalité (1) est négatif; l'inégalité (1) est donc toujours vérifiée ; dans ce cas, il suffit que la force F soit plus petite que $P(\sin \alpha + f \cos \alpha)$;

2° $\operatorname{tg} \alpha > f$. Le second membre de l'inégalité (1) est positif, la force F doit être comprise entre

$$P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \qquad \text{et} \qquad P(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

EXERCICES

1. Trois forces OA, OB, OC se font équilibre; la force OA est égale à l'unité, OB à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, l'angle AOB est droit. Calculer la grandeur de la force OC ainsi que les angles AOC, BOC.

2. Si R est la résultante de trois forces concourantes F_1, F_2, F_3, on a

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3 \cos(F_2, F_3) + 2F_3F_1 \cos(F_3, F_1) + 2F_1F_2 \cos(F_1, F_2),$$

la notation (F_i, F_k) désignant l'angle des forces F_i et F_k.

3. Un point M est attiré par deux points fixes A et B proportionnellement à la distance, les coefficients d'attraction étant α et β. Construire la résultante de ces deux forces ; montrer qu'elle coupe AB en un point fixe.

4. A et B étant deux points, à chaque point M quelconque on applique deux forces, l'une représentée par le vecteur MA, l'autre égale et opposée à MB. Montrer que la résultante de ces deux forces reste constante en grandeur et en direction.

5. On donne un carré ABCD ; à chaque point M, arbitraire, on applique quatre forces représentées par les vecteurs MA, MB, MC, MD ; construire la résultante de ces quatre forces.

6. Un point M, mobile sur une parabole parfaitement polie, est attiré par un point I de l'axe ; trouver les positions d'équilibre.

7. Un point mobile avec frottement sur une sphère est attiré par un

point fixe I. — Trouver les positions d'équilibre. — Distinguer celles qui conviennent au cas où le point est placé à l'extérieur de la sphère.

8. Un point M, attiré proportionnellement à la distance par deux centres fixes A et B, se meut avec frottement sur un plan horizontal. Trouver les positions d'équilibre.

9. Un point pesant M est mobile avec frottement sur un cercle non situé dans un plan vertical. Trouver les positions d'équilibre.

CHAPITRE VIII

DYNAMIQUE DU POINT

---

§ I.

Point matériel libre.

156. Formules fondamentales. — On sait que si un point M libre est en mouvement, la force qui produit le mouvement est dirigée suivant l'accélération et égale au produit de la masse par l'accélération. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point M, les projections de l'accélération sur les axes sont (62)

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si, d'autre part, X, Y, Z sont les projections de la force sur les mêmes axes, la formule fondamentale $F = m\gamma$ donnera

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Ce sont les formules fondamentales de la dynamique du point.

157. Remarque. — Il est impossible de discuter, dans ce cours, les équations fondamentales ; nous signalerons cependant le résultat suivant, que nous admettrons :

Quand on connaît la loi de la force (c'est-à-dire quand on peut calculer X, Y, Z connaissant le temps, la position du mobile et sa vitesse), *le mouvement est déterminé quand on se donne la position initiale du mobile et sa vitesse initiale.*

158. Mouvement vertical d'un point pesant. — Considérons un point soumis uniquement à l'action de la pesanteur ; si la vitesse initiale de ce point est verticale, il est clair que sa trajectoire sera une verticale. Prenons cette trajectoire comme axe des x, comme origine O le point de départ (*fig.* 58) ; fixons le sens positif de l'axe $x'x$ vers le haut et désignons par v_0 la valeur initiale de la vitesse. La valeur algébrique de la force est $-mg$; on a donc

x
A
M
O
x'

Fig. 58.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g.$$

En prenant les primitives des deux membres,

$$v = \frac{dx}{dt} = -gt + A,$$

A étant une constante que l'on détermine en remarquant que pour $t = 0$ v doit être égal à v_0. On trouve $A = v_0$; on a donc

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = v = v_0 - gt.$$

En prenant encore une fois les primitives des deux membres et en remarquant que pour $t = 0$, $x = 0$, on aura

$$(2) \qquad x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Des équations (1) et (2) on déduit facilement

$$v^2 = v_0^2 - 2gx.$$

Discussion. — 1° v_0 *est positif*. La formule (1) montre que v est positif au début, que v décroît et s'annule à l'instant τ donné par la formule

$$\tau = \frac{v_0}{g}.$$

A partir de cet instant, v devient négatif ; ainsi, jusqu'à

l'instant τ le mouvement est ascendant ; à partir de cet instant le mobile descend. A l'instant τ le mobile atteint le point le plus haut de sa course ; soit A ce point. On peut obtenir l'abscisse du point A soit en remplaçant t par τ dans la formule (2), soit en exprimant que v est nul dans la formule (3). On trouve ainsi

$$\mathrm{OA} = h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Soit M un point placé entre O et A ; le mobile passe deux fois en M, une fois à la montée, l'autre fois à la descente ; la formule (3) montre qu'aux moments des passages en M les vitesses du mobile sont les mêmes.

2° v_0 *est négatif*. La formule (1) montre que v sera constamment négatif ; le mobile descend constamment.

Si v_0 est nul, on a

$$v = -gt, \qquad x = -\frac{1}{2}gt^2.$$

159. Mouvement des projectiles dans le vide. — Supposons que dans le voisinage de la terre on lance un corps quelconque ; ce corps sera soumis à l'action de la pesanteur et à la résistance de l'air. Nous négligerons cette résistance, ce qui se réaliserait exactement si l'on opérait dans le vide ; le corps reste donc soumis uniquement à l'action de la pesanteur. Considérons le plan vertical qui contient la vitesse initiale ; dans ce plan, prenons comme origine O le point de départ, comme axe Ox une horizontale et comme axe Oy la verticale dirigée vers le haut

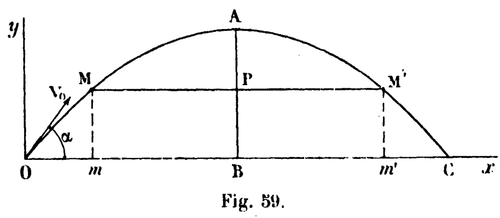


Fig. 59.

(*fig.* 59). Par raison de symétrie, le mobile restera dans ce plan ; on peut d'ailleurs le démontrer directement.

Désignons en effet par Oz la perpendiculaire menée par O au

plan xOy ; la projection de la force sur Oz étant nulle, on aura

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

En prenant la primitive, on trouve que $\frac{dz}{dt}$ est constant ; la projection de la vitesse du mobile sur Oz reste donc constante ; comme au début cette projection est nulle, on a toujours

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

On en conclut que z est constant ; comme à l'instant initial z est nul, z restera toujours nul ; par conséquent le mobile reste dans le plan xOy.

Cela posé, les projections du poids sur les axes sont

$$X = 0, \qquad Y = -mg ;$$

donc les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

En prenant les primitives, on trouve

$$\frac{dx}{dt} = a, \qquad \frac{dy}{dt} = b - gt,$$

a et b étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, désignons par v_0 la vitesse initiale, par α l'angle qu'elle fait avec Ox ; à l'instant $t = 0$ les projections de la vitesse du mobile sur Ox et Oy sont respectivement $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$; il faut donc que pour $t = 0$ $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ prennent respectivement les valeurs $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$; par conséquent,

$$a = v_0 \cos \alpha, \qquad b = v_0 \sin \alpha.$$

On aura donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos \alpha, \\ \frac{dy}{dt} &= v_0 \sin \alpha - gt. \end{aligned} \right.$$

En remontant aux fonctions primitives et en remarquant que pour $t=0$, x et y sont nuls, on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} x = tv_0 \cos \alpha, \\ y = tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

En élevant les équations (1) au carré et en ajoutant ensuite membre à membre, on a

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2,$$

d'où, en simplifiant,

$$(3)\qquad v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Si l'on tire t de la première des équations (2) et que l'on porte ensuite dans la seconde, on aura

$$(4)\qquad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

c'est l'équation de la trajectoire.

Discussion. — Nous supposons α positif, c'est-à-dire que le mobile est lancé au-dessus de l'horizon. La seconde des formules (1) montre qu'au début $\frac{dy}{dt}$ est positif, y commence par croître, il croît jusqu'à l'instant où $\frac{dy}{dt}$ s'annule ; cet instant τ est donné par la formule

$$(5)\qquad \tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

A partir de cet instant $\frac{dy}{dt}$ devient négatif, y décroît ; à l'instant τ le mobile se trouve au point le plus haut de sa course ; soit A ce point, B le point où la verticale du point A rencontre Ox ; on obtiendra l'abscisse OB et l'ordonnée BA du point A en remplaçant dans les formules (2) t par τ ; on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} OB = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \\ BA = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{cases}$$

On peut remarquer que BA est la hauteur à laquelle s'élève un mobile lancé verticalement de bas en haut avec la vitesse $v_0 \sin\alpha$.

En tenant compte de la valeur de τ, la seconde des équations (2) peut s'écrire

$$(7) \qquad y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{1}{2} g(t-\tau)^2.$$

Soient alors M et M' les positions du mobile aux instants $\tau - \theta$ et $\tau + \theta$; les ordonnées mM, m'M' de ces points ont la même valeur, car on a

$$m\mathrm{M} = m'\mathrm{M}' = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{1}{2} g\theta^2.$$

Les points M et M' sont sur une même parallèle à Ox, et si P est le point où la droite MM' coupe la verticale AB, on a

$$(8) \qquad \mathrm{PA} = \frac{1}{2} g\theta^2.$$

Les abscisses Om, Om' des points M et M' ont pour valeurs

$$\mathrm{O}m = v_0 \cos\alpha \times (\tau - \theta),$$
$$\mathrm{O}m' = v_0 \cos\alpha \times (\tau + \theta).$$

Il en résulte que le point B est le milieu de mm', ou encore que P est le milieu de MM'; la trajectoire est donc symétrique par rapport à la droite AB; autrement dit AB est un *axe* de la trajectoire. On a en outre

$$(9) \qquad \mathrm{PM} = \mathrm{B}m = \mathrm{OB} - \mathrm{O}m = v_0 \cos\alpha \times \theta.$$

Des équations (8) et (9) on déduit

$$\frac{\overline{\mathrm{PM}}^2}{\mathrm{PA}} = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha}{g}.$$

Le rapport $\frac{\overline{\mathrm{PM}}^2}{\mathrm{PA}}$ étant constant, la trajectoire est une parabole (*Traité de Géométrie*, 939).

Soit C le point où la trajectoire vient couper l'horizontale

Ox ; la trajectoire étant symétrique par rapport à la droite AB, OC est le double de OB ; donc

$$OC = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g};$$

OC est l'*amplitude* du tir.

160. Problème. — *La vitesse initiale* v_0 *étant donnée, sous quel angle* α *faut-il lancer le mobile pour atteindre un point déterminé ?*

Soit M le point qu'il s'agit d'atteindre, x_1 et y_1 ses coordonnées ; écrivons que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de la trajectoire [Équation (4), 159]. On aura

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_1^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x_1 \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx_1^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha).$$

On obtient ainsi une équation du second degré pour déterminer $\operatorname{tg}\alpha$; ordonnons cette équation, on aura

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2\alpha \frac{gx_1^2}{2v_0^2} - \operatorname{tg}\alpha x_1 + y_1 + \frac{gx_1^2}{2v_0^2} = 0.$$

Pour que cette équation admette des racines, il faut et il suffit que

$$x_1^2 - 4\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\left[y_1 + \frac{gx_1^2}{2v_0^2}\right] \geqslant 0,$$

ou bien, en divisant par $\frac{4gx_1^2}{2v_0^2}$ qui est positif,

$$(2) \qquad \frac{v_0^2}{2g} - y_1 - \frac{gx_1^2}{2v_0^2} \geqslant 0.$$

Cherchons d'abord la courbe dont l'équation est

$$\frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0$$

ou bien
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

On voit d'abord que le maximum de y a lieu pour $x = 0$, la courbe rencontre Oy en un point S tel que

$$OS = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Le point S est le point le plus élevé de la courbe ; si nous donnons à x deux valeurs égales et de signes contraires, Om et Om' (*fig.* 60), les valeurs correspondantes de y, mM et $m'M'$, sont égales ; la droite MM' est donc perpendiculaire à OS et son milieu P se trouve sur cette droite ; la droite OS est par suite un axe de symétrie de la courbe. D'autre part, on a

$$PM = Om = x,$$

$$PS = OS - OP = \frac{v_0^2}{2g} - y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

De ces équations on déduit

$$\frac{\overline{PM}^2}{PS} = \frac{2v_0^2}{g};$$

par conséquent, la courbe est une parabole. Cette parabole partage les points du plan en deux régions ; pour les points situés à l'intérieur, le premier membre de (2) a toujours le même signe ; pour les points à l'extérieur, toujours le signe contraire. En remarquant que si l'on remplace x_1 et y_1 par les coordonnées du point O dans l'inégalité (2), on obtient un résultat positif $\frac{v_0^2}{2g}$, on en conclut que si le point M est à l'intérieur de la parabole, la relation (2) est satisfaite ; si, au contraire, le point M est à l'extérieur de cette parabole, l'inégalité (2) n'est pas satisfaite ; donc :

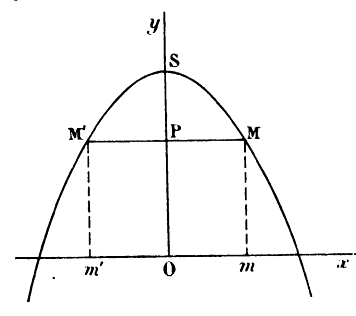


Fig. 60.

Pour qu'on puisse atteindre le point M, *il faut et il suffit que ce point ne soit pas extérieur à la parabole dont l'équation est*

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

On a donné à cette parabole le nom de *parabole de sûreté*.

161. Mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. — Soit M un point attiré par un centre fixe O proportionnellement à la distance. Plaçons ce point M en A sans vitesse initiale ; il est clair que le point va se déplacer sur la droite AO. Soit Ox cette droite (*fig.* 61) ;

x' A' O F M A x

Fig. 61.

prenons comme origine le point attractif O. Si M est une position quelconque du mobile, x l'abscisse de ce point, la force F qui agit sur le point M est dirigée de M vers O, sa grandeur est proportionnelle et de signe contraire à x ; on peut donc poser

$$F = -m\omega^2 x,$$

m étant la masse du point M ; par conséquent, l'accélération du point M est

$$\gamma = -\omega^2 x ;$$

donc l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

Cela posé, imaginons un mouvement oscillatoire simple décrit par un point M′ sur la droite Ox et défini par l'équation

$$x = a \cos \omega t,$$

a étant l'abscisse du point A.

Dans ce mouvement, l'accélération est (70) égale à $-\omega^2 x$. Si m est la masse de ce point M′, la force qui produit le mouvement est $-m\omega^2 x$; la loi de la force qui produit le mouvement du point M′ est donc la même que celle de la force qui agit sur le point M. D'autre part, à l'instant $t = 0$ les points M et M′ coïncident et ont tous deux une vitesse nulle ; par conséquent (157) les points M et M′ coïncident constamment. L'abscisse x du point M est donc donnée par la formule

$$x = a \cos \omega t.$$

On voit que le point M oscille entre le point A et le point A′

dont l'abscisse est $-a$; le temps T que met le mobile pour aller de A en A' est donné par la formule

$$T = \frac{\pi}{\omega}.$$

On voit que la durée d'une oscillation simple est indépendante de la position initiale A où l'on place le point sans lui imprimer de vitesse initiale. Cette propriété s'exprime en disant que le mouvement produit est *tautochrone*.

§ II.

Point matériel assujetti à rester sur une courbe.

162. Un point matériel M assujetti à rester sur une courbe parfaitement polie C (*fig.* 62) peut être considéré comme un point matériel complètement libre, pourvu qu'on ajoute à la force F directement appliquée à ce point la réaction N de la courbe sur ce point ; cette réaction N est normale à la courbe. Il s'ensuit que la résultante des forces N et F est dirigée suivant l'accélération γ du point et égale au produit $m\gamma$; si donc on projette sur un axe quelconque, on aura

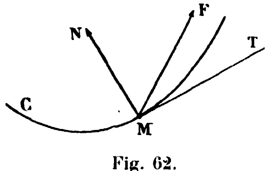


Fig. 62.

$$\text{pr. } F + \text{pr. } N = m \times \text{pr. } \gamma.$$

Projetons en particulier sur la tangente MT à la courbe. La projection de la force F s'appelle la composante tangentielle de la force : nous la désignerons par F_t ; la projection de N est nulle ; la projection de γ est égale (114) à $\frac{d^2s}{dt^2}$. On a donc

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t.$$

C'est l'équation qui donne le mouvement du point sur la courbe.

163. Pendule simple. — Un pendule simple est constitué par un point matériel M attaché à l'extrémité d'un fil inextensible dont on néglige la masse et dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe O (*fig.* 63); si le fil est placé suivant la verticale descendante OA, il y a équilibre. Écartons le fil de cette position d'équilibre et abandonnons-le sans vitesse initiale en le plaçant dans la position OB. Il est clair que le mobile va se déplacer dans le plan vertical qui passe par OB et décrire dans ce plan un arc de cercle de centre O et dont le rayon OA est égal à la longueur l du fil. Désignons par α l'angle d'écart AOB; soit à un instant quelconque M la position du mobile sur le cercle; désignons par θ l'angle que fait le fil OM avec la verticale. Le poids $P = mg$ appliqué en M peut être décomposé en deux autres forces, l'une MQ dirigée suivant le prolongement de OM, et l'autre MR tangente au cercle; cette tangente MR a pour grandeur $mg \sin \theta$.

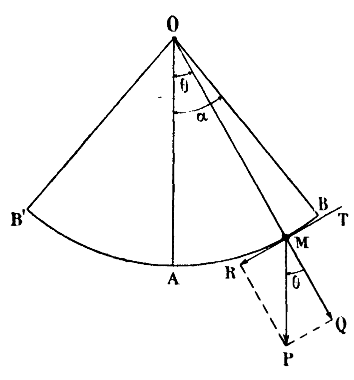


Fig. 63.

Si l'on compte les arcs à partir du point A, dans le sens de A vers B, la composante MR est négative; sa valeur algébrique est $-mg \sin \theta$. On a donc (162)

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta;$$

mais $s = l\theta$; par conséquent

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

C'est l'équation du mouvement du pendule.

Cas des petites oscillations. — Si l'angle α, et par suite l'angle θ, est petit, on peut remplacer, sans commettre d'erreur sensible, le sinus par l'arc. L'équation (1) qui donne le mouvement devient donc

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.$$

C'est l'équation du mouvement rectiligne d'un point attiré par une autre force proportionnellement à la distance (161); il faut supposer ici

$$\omega^2 = \frac{g}{l};$$

par conséquent la durée d'une oscillation simple, c'est-à-dire le temps que met le mobile pour aller du point B à son symétrique B' par rapport à la verticale OA, est donnée (161) par la formule

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ III.

Point assujetti à rester sur une surface.

164. Un point M assujetti à rester sur une surface S peut être considéré comme un point libre, pourvu qu'on ajoute à la force F directement appliquée à ce point la réaction N de la surface sur le point. Cette réaction N est normale à la surface si cette surface est supposée parfaitement polie (*fig.* 64).

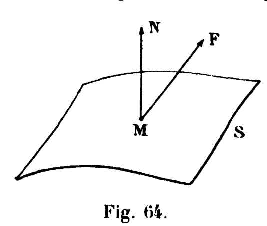


Fig. 64.

Il en résulte que si γ est l'accélération du point mobile, on aura, en projetant orthogonalement sur une droite ou sur un plan quelconque,

$$\text{pr. } F + \text{pr. } N = m \times \text{pr. } \gamma.$$

Supposons en particulier que la surface S se réduise à un

plan P ; si l'on projette sur ce plan, la projection de la réaction N est nulle ; on a donc simplement

$$\text{pr. F} = m \times \text{pr. } \gamma.$$

Mais l'accélération γ est, dans ce cas, située dans le plan P ; par conséquent,

$$\text{pr. F} = m\gamma.$$

Il en résulte que le mouvement produit par la force F est le même que celui que produirait sa projection sur le plan.

165. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné. — Soit α l'angle que fait le plan avec l'horizon ; la projection du poids sur le plan est dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan, vers le bas et égale en grandeur à $mg \sin \alpha$. Le mouvement d'un point pesant sur ce plan est donc tel que l'accélération soit toujours dirigée suivant la ligne de plus grande pente, vers le bas, et constamment égale à $g \sin \alpha$. La théorie est donc la même que celle du mouvement d'un point pesant libre ; il suffit de remplacer g par $g \sin \alpha$.

En particulier, s'il n'y a pas de vitesse initiale, le point se meut suivant une ligne de plus grande pente, vers le bas, et l'espace parcouru est donné par la formule

$$e = \frac{1}{2} g \sin \alpha \times t^2.$$

§ IV.

Frottement de glissement.

166. Lois du frottement de glissement. — Nous avons vu (162 et 164) qu'un mobile assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface parfaitement polie peut être considéré comme un point matériel complètement libre, pourvu qu'on ajoute aux forces directement appliquées au point une autre force qu'on appelle la réaction de la courbe ou de la surface sur le point. Cette réaction est normale à la courbe ou à la surface.

Si la courbe ou la surface ne sont pas parfaitement polies, il y a *frottement*. On peut encore considérer le point matériel comme complètement libre, pourvu qu'on ajoute aux forces qui agissent sur le point la réaction de la courbe ou de la surface sur le point ; seulement la *réaction n'est plus normale à la courbe ou à la surface*.

Pour comprendre les lois auxquelles est assujettie cette réaction, décomposons-la en deux forces : l'une N normale, l'autre T tangente à la courbe ou à la surface (*fig.* 65) ; la composante N s'appelle la *réaction normale* ; la composante T la *réaction tangentielle*.

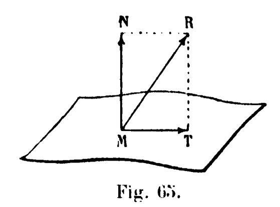


Fig. 65.

Cela posé, la réaction tangentielle est soumise aux deux lois suivantes :

1° *La réaction tangentielle est toujours dirigée en sens inverse de la vitesse du mobile ;*

2° *Cette réaction est égale au produit de la réaction normale par un coefficient constant f.*

Ce coefficient f, qui ne dépend que de la nature des corps en contact, est le *coefficient de frottement de glissement*. Ce coefficient est toujours plus petit que celui qui a été défini au n° 150.

167. Mouvement avec frottement d'un point sur un point incliné. — Nous supposerons que la vitesse initiale est nulle ou dirigée suivant la ligne de plus grande pente : il est clair que le point va se mouvoir, par raison de symétrie, suivant la ligne de plus grande pente.

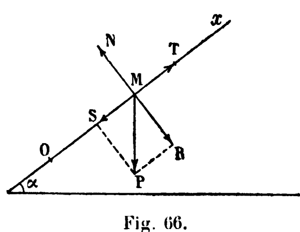


Fig. 66.

Prenons comme origine O le point de départ, comme axe des x la ligne de plus grande pente dirigée vers le haut ; désignons par α l'angle d'inclinaison du plan (*fig.* 66). Le poids P peut se décomposer en deux forces, l'une normale R et l'autre S dirigée suivant la ligne de plus grande pente vers le

bas ; de même, la réaction a deux composantes, une composante normale N et une composante tangentielle T. Comme le mouvement du point M se fait suivant Ox, les forces N et R doivent se détruire ; on a donc

$$N = R = P \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$

Il en résulte que la grandeur de T est $fP \cos \alpha$; cette force T est dirigée vers le bas si le mouvement est ascendant, et vers le haut s'il est descendant.

Enfin, la force S a toujours pour valeur algébrique

$$S = -P \sin \alpha = -mg \sin \alpha.$$

Cela posé, nous étudierons successivement le mouvement ascendant et le mouvement descendant.

1° *Mouvement ascendant.*

Dans ce cas, T est négatif. On a donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

On a un mouvement uniformément retardé ; l'accélération est $-g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$.

2° *Mouvement descendant.*

Dans ce cas, T est positif. On a donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

On voit que l'accélération est encore constante. Nous distinguerons trois cas :

I. $\operatorname{tg} \alpha < f$. L'accélération est positive, elle est en sens inverse de la vitesse ; le mouvement est uniformément retardé.

II. $\operatorname{tg} \alpha = f$. L'accélération est nulle, on a un mouvement uniforme.

III. $\operatorname{tg} \alpha > f$. L'accélération est négative, elle a le même sens que la vitesse ; le mouvement est uniformément accéléré.

168. Remarque. — Quand le mouvement est uniformément retardé, il arrive un moment où la vitesse du mobile devient nulle ; il reste à voir ce qui arrivera à partir de cet instant.

La composante tangentielle S du poids mettra le point en mouvement vers le bas si elle est assez grande pour vaincre la force T qui est une résistance au mouvement ; si au contraire S est plus petit que T, le mobile reste au repos. En résumé, si

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant f,$$

le mobile reste au repos, et si $\operatorname{tg} \alpha > f$, le mobile prend un mouvement descendant, uniformément accéléré (1).

§ V.

Travail. — Force vive.

169. Définitions. — Considérons une force constante F dont le point d'application se déplace de A vers B dans le sens de la force (*fig.* 67) ; le *travail* de la force dans ce déplacement est égal, par définition, au produit de la force par le chemin parcouru par son point d'application. Ce travail T est donc égal à

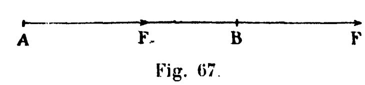


Fig. 67.

$$T = F \times AB.$$

Si l'on suppose $AB = 1$, $F = 1$, on aura $T = 1$, c'est-à-dire que l'unité de travail est le travail produit par l'unité de force quand son point d'application se déplace dans la direction de la force d'une longueur égale à l'unité.

Dans le système d'unités *mètre, seconde, kilogramme* (131), l'unité de travail est égale au travail produit par une force d'un kilogramme quand son point d'application se déplace d'un mètre dans la direction de la force. On donne à cette unité de travail le nom de *kilogrammètre*.

Dans le système C. G. S. (132), l'unité de travail est le travail produit par une force d'une dyne dont le point d'application se

(1) Le coefficient f qui intervient dans cette remarque est le coefficient défini § 150, p. 99.

déplace d'un centimètre dans la direction de la force. Cette unité s'appelle l'*erg*.

Le rapport entre le kilogrammètre et l'erg est égal (136) à $\frac{\lambda^2\mu}{\tau^2}$, où $\lambda = 100$, $\mu = 1\,000\,G$, $G = 9,8$ environ, $\tau = 1$; ce rapport est donc égal à $10^7 \times G$.

Cette unité est très petite ; dans la pratique en emploie le *joule* ; le joule est égal à 10^7 ergs ; on a donc

$$1 \text{ kilogrammètre} = 9{,}8 \text{ joules}.$$

170. Puissance mécanique. — La notion de temps n'entre pas dans la définition du travail ; cependant, dans les applications industrielles, il est nécessaire non seulement de connaître le travail que peut produire une machine mais aussi de savoir combien il faut de temps pour le produire.

On introduit alors une nouvelle notion : c'est la *puissance mécanique*. La puissance mécanique d'une machine est égale au travail qu'elle peut produire dans l'unité de temps. La puissance mécanique sera égale à un (ce sera par conséquent la puissance unité) si, dans l'unité de temps, le travail produit est égal à l'unité.

Dans le système C. G. S., l'unité de puissance sera la puissance d'une machine qui produirait un travail d'un erg en une seconde. Dans la pratique, on multiplie cette unité par 10^7 ; on obtient le *watt*. Le *watt* est la puissance d'une machine qui produit un travail d'un joule par seconde. On se sert aussi fréquemment du *kilowatt*, qui est égal à une puissance de 1 000 watts.

Dans le même ordre d'idées, on fait usage depuis longtemps du *cheval-vapeur*. C'est la puissance d'une machine qui fournit un travail de 75 kilogrammètres par seconde.

Si l'on fait travailler la machine pendant une seconde, on a

$$1 \text{ cheval-vapeur} = 75 \text{ kgm} = 75 \times 9{,}8 \text{ joules} = 735 \text{ joules},$$
$$1 \text{ kilowatt} \ldots\ldots\ldots\ldots = 1\,000 \text{ joules};$$

donc

$$\frac{1 \text{ cheval-vapeur}}{1 \text{ kilowatt}} = 0{,}735.$$

On se sert aussi souvent dans l'industrie des expressions : *kilowatt-heure, cheval-heure* ; le kilowatt-heure est le travail exécuté pendant une heure par une machine dont la puissance est de 1 kilowatt ; le cheval-heure est le travail exécuté pendant 1 heure par une machine dont la puissance est 1 cheval-vapeur.

171. Travail d'une force constante dont le point d'application décrit un segment rectiligne quelconque. — Soit F une force constante dont le point d'application A décrit le segment rectiligne AB (*fig.* 68) ; par définition, le travail de la force F pendant ce déplacement est donné par la formule

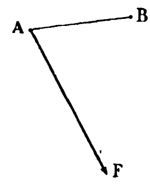


Fig. 8.

$$T = F \times AB \times \cos FAB.$$

Cette formule contient comme cas particulier celle qui a été donnée (169) dans le cas où le déplacement AB se fait suivant la direction de la force.

On voit que le travail de la force est positif ou négatif suivant que l'angle FAB est aigu ou obtus.

Le travail étant un produit de trois facteurs ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul ; donc, le travail ne peut être nul que dans les cas suivants :

1° La force est nulle ;

2° Le déplacement est nul ;

3° La force est normale au déplacement.

L'expression du travail peut s'écrire

$$T = F \times (AB \times \cos FAB).$$

Le produit $AB \times \cos FAB$ est la projection du déplacement sur la force ; donc :

Le travail est égal au produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de la force.

On peut encore écrire l'expression du travail sous la forme suivante :

$$T = AB \times (F \times \cos FAB).$$

Le produit $F \times \cos FAB$ est la projection de la force sur le déplacement AB ; donc :

Le travail est égal au produit du déplacement par la projection de la force sur la direction de ce déplacement.

172. Corollaire. — Considérons plusieurs forces constantes F_1, F_2, ..., F_n appliquées à un point A ; soit R leur résultante. Imaginons que le point A décrive le segment rectiligne AB. On aura

$$\begin{aligned} \text{Tr. } F_1 &= AB \times \text{pr. } F_1, \\ \text{Tr. } F_2 &= AB \times \text{pr. } F_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \text{Tr. } F_n &= AB \times \text{pr. } F_n, \end{aligned}$$

et

$$\text{Tr. } R = AB \times \text{pr. } R,$$

toutes les projections étant faites sur la direction AB. Mais

$$\text{pr. } R = \text{pr. } F_1 + \text{pr. } F_2 + \cdots + \text{pr. } F_n ;$$

par conséquent,

$$\text{Tr. } R = \text{Tr. } F_1 + \text{Tr. } F_2 + \cdots + \text{Tr. } F_n ;$$

donc :

Pour un même déplacement rectiligne, le travail de la résultante de plusieurs forces constantes est égal à la somme des travaux des composantes.

173. Expression analytique du travail d'une force. — Marquons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ; désignons par X, Y, Z les projections de la force F sur ces axes, par ξ, η, ζ celles du déplacement AB de son point d'application (*fig.* 69) ; on pourra décomposer la force F en trois autres P, Q, R parallèles aux axes de coordonnées. D'après le théorème précédent, on a

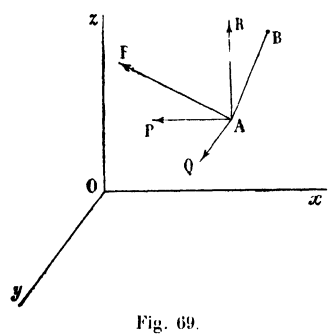


Fig. 69.

$$\text{Tr. } F = \text{Tr. } P + \text{Tr. } Q + \text{Tr. } R.$$

Évaluons le travail de P ; on a

$$\text{Tr. } P = P \times (\text{pr. } AB \text{ sur } P).$$

Si X est positif, la direction de P est la direction Ox ; la projection de AB sur P est ξ ; d'ailleurs $P = X$: le travail de P est $X\xi$.

Si P est négatif, la direction de P est la direction opposée à Ox ; la projection de AB sur P est donc $-\xi$; d'ailleurs $P = -X$: le travail est encore $X\xi$. On voit de même que le travail de Q est $Y\eta$ et celui de R, $Z\zeta$. On a donc

$$\text{Tr. } F = X\xi + Y\eta + Z\zeta.$$

174. Travail d'une force quelconque quand son point d'application se déplace d'une manière quelconque. — Supposons qu'un mobile M se déplace sur une courbe de A en B, et qu'à chaque position du point M sur cette courbe on fasse correspondre une force F (*fig.* 70) (cette force F n'est pas nécessairement celle qui produit le mouvement du point M). Inscrivons dans l'arc de courbe AB une ligne polygonale $AM_1M_2M_3B$; soient F_0, F_1, F_2, F_3 les vecteurs qui représentent la force F aux points A, M_1, M_2, M_3 ; évaluons le travail d'une force constante égale à F_0 quand son point d'application va de A en M_1, puis le travail d'une force constante égale à F_1 quand son point d'application va de M_1 en M_2, etc... Formons la somme des travaux des forces F_0, F_1, F_2, F_3 pour les déplacements respectifs AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3B. Par cette méthode, à chaque ligne polygonale $AM_1M_2M_3B$ inscrite dans l'arc AB nous faisons correspondre un travail déterminé. La limite vers laquelle tend ce travail quand tous les côtés de la ligne polygonale tendent vers zéro est, par définition, le travail de la force F quand le point M se déplace de A en B sur la courbe.

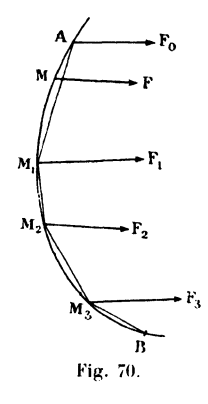


Fig. 70.

175. Travail de la résultante. — Soit M un point qui se déplace sur une courbe en allant de A en B ; considérons des forces quelconques agissant sur le point M et soit R leur résultante. Pour chacun des déplacements partiels AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3B (*fig.* 70) le travail de la résultante est la somme des travaux des

composantes ; il en est de même par conséquent pour le déplacement du point M sur la ligne polygonale $AM_1M_2M_3B$, et, en passant à la limite, pour le déplacement du point M sur l'arc AB ; donc :

Pour un même déplacement quelconque du point d'application, le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.

176. Travail produit par une force constante en grandeur et en direction. — Supposons que la force qui agit sur le point mobile M ait une grandeur constante F et qu'elle reste constamment parallèle à une direction fixe D (*fig.* 71); inscrivons dans l'arc AB décrit par le point M une ligne polygonale $AM_1M_2M_3B$.

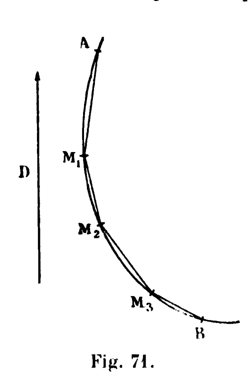


Fig. 71.

Les travaux effectués par la force F dans les déplacements AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3B ont respectivement pour valeurs :

Pour le déplacement	AM_1,	$F \times \text{pr. } AM_1$,
—	M_1M_2,	$F \times \text{pr. } M_1M_2$,
—	M_2M_3,	$F \times \text{pr. } M_2M_3$,
—	M_3B,	$F \times \text{pr. } M_3B$,

toutes les projections étant faites sur la direction D ; il en résulte que, dans le déplacement suivant la ligne brisée $AM_1M_2M_3B$, le travail de la force F est

$$F \times (\text{pr. } AM_1 + \text{pr. } M_1M_2 + \text{pr. } M_2M_3 + \text{pr. } M_3B)$$

ou, en appliquant le théorème des projections,

$$F \times \text{pr. } AB.$$

On voit que l'expression du travail est indépendante de la forme de la ligne brisée inscrite dans l'arc AB ; cette expression donne donc le travail effectué par la force F quand le point M va de A en B.

Supposons en particulier qu'il s'agisse d'un point pesant; rapportons la courbe décrite par le point à des axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des z étant vertical et dirigé vers le haut. Soient z_0 et z les z des points A et B; la projection de AB sur l'axe des z est $z - z_0$; sa projection sur la direction de la force sera $z_0 - z$; par conséquent le travail sera, en désignant par P le poids du point, par m sa masse,

$$P \times (z_0 - z) = mg(z_0 - z).$$

177. Travail élémentaire. — Soient M un point qui décrit un arc de courbe AB, F la force appliquée à ce point. Prenons un point M' très voisin de M (*fig.* 72).

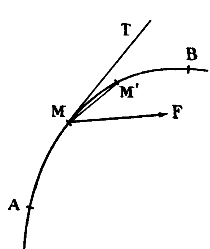


Fig. 72.

Le travail de la force F pour le déplacement rectiligne MM' est

$$(1) \qquad MM' \times \text{pr. } F \text{ sur } MM'.$$

Si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la direction MM' a pour position limite la tangente MT; la projection de F sur MM' a pour limite la composante tangentielle F_t de la force. La corde MM' peut aussi être remplacée par l'arc MM'; si l'on désigne cet arc par ds, on voit que l'expression (1) et l'expression (2)

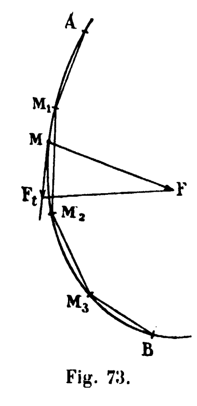


Fig. 73.

$$(2) \qquad F_t \times ds$$

sont telles que la limite de leur rapport est égale à l'unité quand M' tend vers M. Cette expression (2) est le *travail élémentaire* de la force quand son point d'application M décrit un arc infiniment petit $MM' = ds$.

Dans l'évaluation du travail total (174) on peut remplacer les travaux effectués le long des côtés de la ligne brisée par le travail élémentaire correspondant; cela revient à remplacer dans la somme chaque terme par un autre tel que le rapport des deux termes ait pour limite l'unité.

Inscrivons alors dans l'arc AB une ligne brisée $AM_1M_2M_3B$ (*fig.* 73) ; désignons par φ_0 la composante tangentielle de la force en A, par φ_1, φ_2, φ_3 les valeurs de ces composantes en M_1, M_2, M_3. Le travail de la force sera la limite de la somme

$$S = \varphi_0 \times \text{arc } AM_1 + \varphi_1 \times \text{arc } M_1M_2 + \varphi_2 \times \text{arc } M_2M_3 + \varphi_3 \times \text{arc } M_3B$$

quand tous les côtés de la ligne inscrite tendent vers zéro.

178. Représentation graphique et calcul du travail total. — Soit M (*fig.* 73) un point qui décrit un arc de courbe AB :

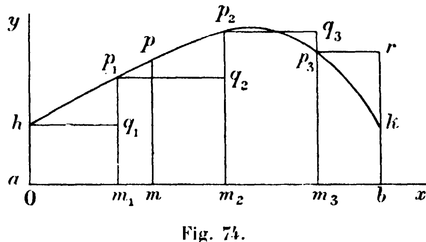


Fig. 74.

comptons sur cette courbe les arcs à partir du point A. Dans un plan xOy, prenons sur Ox une longueur $Om = \text{arc AM}$, puis menons une ordonnée mp (*fig.* 74) égale à la composante tangentielle de la force au point M ; quand le point M décrit l'arc de courbe AB, le point p décrit un arc de courbe hk.

Inscrivons dans l'arc AB une ligne brisée $AM_1M_2M_3B$; aux points M_1, M_2, M_3 correspondent, dans le plan xOy, les points m_1, m_2, m_3 ; les ordonnées correspondantes m_1p_1, m_2p_2, m_3p_3 de l'arc hk donnent les valeurs de la composante tangentielle de la force en M_1, M_2, M_3 ; la composante tangentielle en A est représentée par l'ordonnée initiale ah. On aura donc

$$\begin{aligned}
\varphi_0 \times \text{arc } AM_1 &= ah \times Om_1 &&= \text{aire } Ohq_1m_1. \\
\varphi_1 \times \text{arc } M_1M_2 &= m_1p_1 \times m_1m_2 &&= \text{aire } m_1p_1q_2m_2, \\
\varphi_2 \times \text{arc } M_2M_3 &= m_2p_2 \times m_2m_3 &&= \text{aire } m_2p_2q_3m_3, \\
\varphi_3 \times \text{arc } M_3B &= m_3p_3 \times m_3b &&= \text{aire } m_3p_3rb.
\end{aligned}$$

La somme S (177) est donc égale à la somme des aires des rectangles Ohq_1m_1, $m_1p_1q_2m_2$, $m_2p_2q_3m_3$, m_3p_3rb. Lorsque les côtés de la ligne brisée inscrite dans l'arc AB tendent vers zéro, la somme des aires de ces rectangles a évidemment pour limite

l'aire $Ohkb$, comprise entre l'axe des x, l'arc de courbe hk et les deux ordonnées Oh et bk.

On ramène ainsi l'évaluation du travail total à l'évaluation de l'aire d'une courbe.

Supposons en effet que la force tangentielle F_t s'exprime en fonction de l'arc s par la formule

$$F_t = \varphi(s).$$

Le raisonnement montre que la mesure du travail T correspondant au déplacement AB est donnée par la mesure de l'aire comprise entre l'axe Ox, la courbe représentant la variation de la fonction $\varphi(s)$, les parallèles à Oy d'abscisses 0, s. On sait que

$$\frac{dT}{ds} = \varphi(s) = F_t,$$

et si l'on désigne par Φ une primitive de la fonction φ, on a

$$T = \Phi(s) - \Phi(0).$$

D'une manière plus générale, le travail effectué par la force donnée lorsque le point d'application se déplace du point α d'abscisse curviligne s_1 au point β d'abscisse curviligne s_2 est donné par la formule

$$T = \Phi(s_2) - \Phi(s_1).$$

179. Remarque. — Si la force est constamment normale à la trajectoire, la composante tangentielle est toujours nulle, et par conséquent le travail total est nul.

180. Travail d'un système de forces. — Soient F_1, F_2, ..., F_n des forces appliquées aux points M_1, M_2, ..., M_n. Supposons que les points d'application de ces forces décrivent des arcs de courbe $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, ..., $M_nM'_n$. Le travail du système de forces pour le déplacement considéré est la somme des travaux des forces F_1, F_2, ..., F_n quand leurs points d'application se déplacent respectivement suivant les arcs $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, ... $M_nM'_n$.

181. Cas d'un système pesant. — Supposons que les forces F_1, F_2, ..., F_n appliquées aux points M_1, M_2 ..., M_n soient les

poids de ces points ; soient m_1, m_2, ..., m_n les masses respectives de ces points. Rapportons le système à trois axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des z étant vertical et dirigé vers le haut ; désignons par z_1, z_2, ..., z_n les z des points M_1, M_2, ..., M_n, et par z'_1, z'_2, ..., z'_n ceux des points M'_1, M'_2, ..., M'_n. Le travail du poids appliqué en M_1 est $mg(z_1 - z'_1)$; celui qui est appliqué en M_2 produit un travail $mg(z_2 - z'_2)$ (176), etc... Le travail du système de forces est donc

$$T = mg(z_1 - z'_1) + mg(z_2 - z'_2) + \ldots + mg(z_n - z'_n).$$

Si l'on désigne par M la masse totale du système, par G le centre de gravité des points M_1, M_2, ..., M_n, par G' celui des points M'_1, M'_2, ..., M'_n et par ζ et ζ' les z de G et G', on aura (257)

$$M\zeta = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n,$$
$$M\zeta' = m_1 z'_1 + m_2 z'_2 + \cdots + m_n z'_n;$$

par conséquent

$$T = Mg(\zeta - \zeta').$$

Le travail du système est le même que celui du poids total appliqué au centre de gravité.

182. Définition. — On appelle *force vive* d'un point mobile le produit de sa masse par le carré de sa vitesse. La force vive a donc pour expression mv^2, m désignant la masse du point et v sa vitesse.

183. Théorème. — *La variation de la force vive d'un point matériel entre deux instants quelconques est égale au double du travail de la force qui produit le mouvement entre ces deux instants.*

Soient donc t_1 et t_2 deux instants quelconques, v_1 et v_2 les vitesses du mobile à ces instants, F la force qui produit le mouvement, T le travail produit par la force F depuis l'instant t_1 jusqu'à l'instant t_2 ; on aura

$$(1) \qquad mv_2^2 - mv_1^2 = 2T.$$

Avant de démontrer ce théorème d'une manière générale, nous allons le vérifier dans le cas d'un point pesant libre :

1° *Cas d'un point pesant libre.*

Nous avons étudié (158) le mouvement d'un point pesant libre; si M_1 et M_2 sont les positions du mobile aux instants t_1 et t_2, y_1 et y_2 les y de ces points, on aura [formule (3), 159)]

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gy_1,$$
$$v_2^2 = v_0^2 - 2gy_2,$$

D'autre part, le travail T du poids quand le mobile va de M_1 à M_2 est (176)

$$T = mg(y_1 - y_2).$$

De ces trois formules on déduit bien

$$mv_2^2 - mv_1^2 = 2T.$$

2° *Cas d'une force constante en grandeur et en direction.*

Ce cas est identique au précédent; il suffit de remplacer partout l'intensité g de la pesanteur par l'accélération constante γ que produit la force.

3° *Cas général.*

Nous avons vu que, si l'on désigne par T le travail effectué par les forces appliquées à un point matériel pour un déplacement donné, on avait

$$\frac{dT}{ds} = F_t.$$

Le théorème relatif aux fonctions de fonctions permet de déduire

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \times \frac{ds}{dt} = F_t \times v.$$

On sait d'autre part (114) que l'accélération tangentielle a pour expresion $\frac{dv}{dt}$. Il en résulte que $F_t = m\frac{dv}{dt}$, et par suite

$$\frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Les fonctions T, $\frac{1}{2}mv^2$ ont donc la même dérivée. La diffé-

rence de ces fonctions est alors constante et l'on peut écrire

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + h.$$

La constante h est appelée la constante des forces vives.

Ceci posé, considérons deux instants t_1, t_2 et désignons par T_1, v_1 ; T_2, v_2 les expressions du travail et de la vitesse correspondantes. On aura

$$T_1 = \frac{1}{2} mv_1^2 + h,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + h.$$

Par différence,

$$mv_2^2 - mv_1^2 = 2(T_2 - T_1) = 2T,$$

égalité qui démontre le théorème.

184. Remarque. — Un point matériel assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface peut être considéré comme un point libre, pourvu qu'on ajoute à la force F, directement appliquée, la réaction N de la courbe ou de la surface sur le point. Soit R la résultante de ces deux forces ; on aura, en appliquant le théorème des forces vives,

$$mv_2^2 - mv_1^2 = 2 \text{ Tr. R} ;$$

mais (175) $$\text{Tr. R} = \text{Tr. F} + \text{Tr. N} ;$$

le travail de N est nul, puisque la force N est constamment normale à la trajectoire du point. On a donc

$$mv_2^2 - mv_1^2 = 2 \text{ Tr. F}.$$

En particulier, si l'on considère un point pesant, si M_1 et M_2 sont ses positions aux instants t_1 et t_2, z_1 et z_2 les z de ces points (l'axe des z est supposé vertical et dirigé vers le haut), on aura toujours, aussi bien dans les cas où le point doit rester sur une courbe ou sur une surface que dans le cas où le point est libre, la formule

$$v_0^2 - v_1^2 = 2g(z_1 - z_2).$$

EXERCICES

1. A l'instant initial on lance un corps de bas en haut avec une vitesse v_0 ; à l'instant t on lance un autre projectile de bas en haut avec une vitesse v : les deux mobiles peuvent-ils se rencontrer ?

Trouver l'instant de la rencontre et la position correspondante des mobiles.

2. Lieu des foyers et des sommets des paraboles (159) qui correspondent à une même valeur de v_0.

3. La parabole de sûreté est l'enveloppe de toutes les paraboles trajectoires.

4. Mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, en supposant que la vitesse initiale v_0 passe par le centre d'attraction.

5. Mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, en tenant compte du frottement. — Le frottement est dirigé en sens inverse de la vitesse et a une grandeur constante. On étudiera seulement le cas où la vitesse initiale est nulle.

6. Par un point donné A on mène une droite arbitraire AL ; un point pesant M, partant de A sans vitesse initiale, est assujetti à rester sur la droite AL. — Mouvement de ce point. Quel est, à un instant quelconque, le lieu des positions du point M quand la direction AL varie ?

7. Aux points A et B on applique des forces F et φ constantes en grandeur, dirigées en sens inverses et portées sur la droite AB. Évaluer le travail produit par ces deux forces quand les points A et B se déplacent d'une manière quelconque.

8. Un point mobile M est soumis à l'action d'une force F de grandeur constante, dirigée vers un point fixe O. Évaluer le travail de cette force quand le point M décrit un arc de courbe quelconque.

CHAPITRE IX

STATIQUE DU CORPS SOLIDE

---

§ I.

Notions générales. — Définition des systèmes équivalents.

185. Définition. — Nous avons défini le corps solide : *Un système de points matériels dont les distances respectives restent invariables.*

Si l'on considère deux points quelconques A et B d'un tel corps, la distance AB reste invariable. Ces points A et B ne peuvent donc pas se mouvoir tous deux d'une façon complètement arbitraire ; on dit qu'ils sont soumis à une *liaison.*

Les points d'un corps solide sont donc soumis à un certain nombre de liaisons ; ces liaisons proviennent de ce fait que la distance de deux points du corps reste fixe.

Si les points d'un corps solide ne sont pas assujettis à d'autres conditions, on dit que le corps solide est *libre.*

Mais on peut imposer d'autres conditions aux points d'un corps solide ; on peut fixer, par exemple, un ou deux de ses points, obliger un point du corps à rester sur une surface, etc... On dit, dans ce cas, que le corps est *gêné.* On passe du corps solide libre au corps solide gêné par l'introduction de nouvelles liaisons.

Rappelons encore la définition de l'équilibre : *Un corps solide est en équilibre sous l'action d'un système de forces lorsque, le corps étant supposé primitivement au repos, il reste au repos quand on fait agir sur lui les forces du système.*

Enfin nous emploierons les notations suivantes : Si A désigne

un système de forces appliquées à un corps matériel, nous désignerons par $-A$ le système obtenu en changeant le sens de toutes les forces du système A sans changer leur grandeur ni leur point d'application.

Si A et B sont deux systèmes de forces appliquées à un corps matériel, nous désignerons par $A+B$ le système formé par l'ensemble des forces des systèmes A et B.

186. Axiome I. — *Si un corps matériel est en équilibre sous l'action des systèmes* A *et* B, *il est en équilibre sous l'action du système* $A+B$;

de même,

Si les systèmes $A+B$ *et* B *maintiennent en équilibre un corps matériel, il en est de même du système* A ;

ce qu'on peut encore énoncer ainsi :

Si un corps matériel est en équilibre, on ne trouble pas l'équilibre en ajoutant ou en retranchant aux forces qui agissent sur lui un système en équilibre.

187. Axiome II. — *Si un corps matériel est en équilibre, il restera en équilibre si, sans rien changer aux forces qui agissent, on introduit de nouvelles liaisons.*

Ainsi, par exemple, si un corps solide complètement libre est en équilibre sous l'action d'un système de forces, il restera en équilibre sous l'action du même système quand on fixera un ou deux points de ce corps.

Si un corps solide qui a un point fixe est en équilibre sous l'action d'un système de forces, il restera en équilibre sous l'action du même système si l'on fixe un autre point du corps.

188. Remarque. — Cet axiome comprend comme cas particulier ce qu'on appelle en physique le principe de solidification.

189. Corollaire. — *Si les forces qui agissent sur chaque point d'un corps matériel ont une résultante nulle, le corps est en équilibre.*

En effet, si les points matériels qui forment le corps étaient indépendants les uns des autres, chacun d'eux, considéré isolé-

ment, serait en équilibre ; l'ensemble de ces points formerait donc un système en équilibre.

Pour passer d'un système de points indépendants au corps matériel considéré, il faut introduire entre ces points un certain nombre de liaisons ; ce sont les liaisons qui doivent exister entre les points du corps. Or, l'introduction de nouvelles liaisons ne rompt pas l'équilibre (Axiome II, 187) ; donc le corps matériel considéré est en équilibre.

190. Systèmes équivalents. — Deux systèmes de forces appliquées à un corps matériel sont dits *équivalents* lorsqu'en ajoutant un même système à chacun d'eux on maintient le corps en équilibre.

Ainsi, les systèmes A et B seront équivalents s'il existe un troisième système, C, tel que chacun des systèmes A + C et B + C forme un système en équilibre.

191. Théorème. — *Si l'on remplace les forces qui agissent sur chaque point d'un corps matériel par leur résultante, on obtient un nouveau système équivalent au premier.*

En effet, désignons par A le système primitif, par B le système formé par les résultantes ; le système composé de A et de — B est en équilibre, car les forces qui agissent sur chaque point ont une résultante nulle (189) ; il en est de même du système formé par B et — B ; donc les systèmes A et B sont équivalents.

192. Théorème. — *Si un système de forces* A *agissant sur un corps matériel est en équilibre, il en est de même du système* (— A).

En effet, les deux systèmes A et A + (— A) étant en équilibre, il en est de même du système (— A) (Axiome I, 186).

193. Théorème. — *Si* A *et* B *sont deux systèmes de forces équivalents, le système formé de* B *et de* — A *est en équilibre.*

En effet, A et B étant équivalents, il existe un troisième système, C, tel que les systèmes A + C et B + C soient en équilibre.

Au système B + C nous pourrons ajouter, sans rompre l'équilibre, le système formé de + A et de — A ; on obtient ainsi un système en équilibre formé des forces qui appartiennent aux systèmes B, C, A, — A ; on peut sans rompre l'équilibre (Axiome I, 186) supprimer les forces des systèmes A et C ; par conséquent, le système composé de B et de — A est en équilibre.

194. Théorème. — *Deux systèmes équivalents à un troisième sont équivalents.*

En effet, soient B et C deux systèmes équivalents au système A ; les systèmes B et C sont maintenus en équilibre par le système (— A) (193) ; donc (190) les systèmes B et C sont équivalents.

195. Théorème. — *Si* A *est un système quelconque de forces,* B *un système en équilibre, les systèmes* A *et* A + B *sont équivalents.*

En effet, le système formé de A et de — A est en équilibre ; d'autre part, le système formé de A + B et de — A se compose de deux parties : l'une + A et — A, l'autre B ; chacune de ces parties étant en équilibre, il en est de même du système total (Axiome I, 186).

Chacun des deux systèmes A et A + B étant maintenu en équilibre par le système — A, ces deux systèmes sont équivalents (190).

On peut encore énoncer le résultat précédent ainsi :

Si à un système de forces on ajoute ou l'on retranche un système en équilibre, on obtient un système équivalent au système primitif.

196. Théorème. — *Si les systèmes* A *et* B *sont respectivement équivalents aux systèmes* A' *et* B', *les systèmes* A + B *et* A' + B' *sont équivalents.*

En effet, ces deux systèmes sont maintenus en équilibre par le système formé de — A et de — B.

Le théorème s'étend évidemment à une somme d'un nombre quelconque de systèmes équivalents.

197. Axiome III. — *Si en deux points* A *et* B *d'un corps solide on applique des forces* F *et* F′, *égales, portées sur la droite* AB

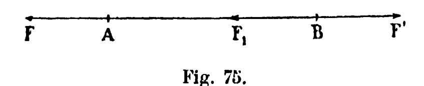


Fig. 75.

et dirigées en sens contraire, ces deux forces se font équilibre (*fig*. 75).

198. Corollaire. — Soit F_1 la force appliquée en B, égale et opposée à F′ ; les forces F et F′ d'une part (197), les forces F_1 et F′ d'autre part, se font équilibre ; donc (190), les forces F et F_1 sont équivalentes ; si nous remarquons d'autre part que les vecteurs F et F_1 sont équivalents, on peut dire :

A deux vecteurs équivalents correspondent deux forces équivalentes par rapport à un corps solide.

Cette propriété peut aussi s'énoncer sous la forme suivante :

On peut transporter une force appliquée à un corps solide en un point quelconque de sa direction sans changer son sens ni sa grandeur.

Cet énoncé, pris à la lettre, est évidemment incorrect ; il faut entendre par là que, si l'on effectue l'opération indiquée, on remplace la force par une force équivalente.

199. Axiome IV. — *Si un corps solide a un axe fixe et s'il est soumis à l'action d'une seule force perpendiculaire à l'axe, ne rencontrant pas l'axe, le corps n'est pas en équilibre.*

§ II.

Réduction des forces appliquées à un corps solide libre à deux forces.

200. Somme géométrique et moment résultant par rapport à un point d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Considérons un système quelconque de forces appliquées à

un corps solide ; à chaque force faisons correspondre le vecteur qui la représente ; au système de forces correspondra un système de vecteurs.

Cela posé, nous appellerons *résultante générale* du système de forces la résultante générale du système de vecteurs correspondant (Vecteurs, 22) ; *moment résultant* par rapport à un point O, le moment résultant du système de vecteurs par rapport à ce point (Vecteurs, 23).

De la théorie des systèmes de vecteurs résultent les théorèmes suivants :

La projection de la résultante générale d'un système de forces sur un axe est égale à la somme des projections de toutes les forces du système sur le même axe.

La projection du moment résultant, par rapport à un point quelconque O, d'un système de forces sur un axe passant par le point O est égale à la somme des moments des forces du système par rapport au même axe.

201. Expression analytique de la résultante générale et du moment résultant par rapport à un point O. — Soient F_1, F_2, ..., F_n les forces appliquées à un corps solide ; OR leur résultante générale ; OG leur moment résultant par rapport au point O. Par le point O menons trois axes Ox, Oy, Oz formant un trièdre trirectangle ; désignons par X_1, Y_1, Z_1 les projections de la force F_1 sur ces axes, par X_2, Y_2, Z_2 celles de la force F_2, etc..., par X_n, Y_n, Z_n celles de la force F_n ; désignons de même par L_1, M_1, N_1 les moments de la force F_1 par rapport à ces axes, par L_2, M_2, N_2 ceux de la force F_2, etc..., par L_n, M_n, N_n ceux de la force F_n ; enfin, soient X, Y, Z les projections de OR sur les axes, L, M, N celles de OG ; on aura, d'après les théorèmes du numéro précédent,

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \end{array} \right.$$

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n, \\ M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n, \\ N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n. \end{array} \right.$$

202. Opérations élémentaires. — On transforme un système de forces appliquées à un corps solide en un système équivalent par les deux opérations élémentaires suivantes :

1° *Adjonction ou suppression de deux forces, portées sur la même droite, égales et dirigées en sens contraires* (Axiome III, 197) ;

et, comme conséquence,

Transfert d'une force en un point quelconque de sa direction sans changer ni son sens, ni sa grandeur (198).

2° *Remplacement de plusieurs forces appliquées à un même point par leur résultante, ou, inversement, remplacement d'une force appliquée en un point par ses composantes* (191).

Ces deux opérations sont appelées *opérations élémentaires.*

203. Remarque. — Les deux opérations que nous venons d'indiquer ne changent pas la résultante générale et le moment résultant par rapport à un point du système de forces.

204. Théorème. — *On peut, par les opérations élémentaires, réduire un système quelconque de forces appliquées à un corps solide à trois forces appliquées en trois points* A, B, C *non situés en ligne droite* (*fig.* 76).

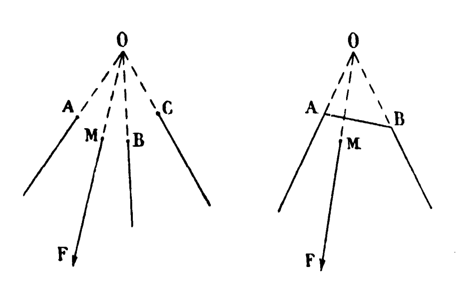


Fig. 76.

Considérons d'abord une force F non située dans le plan ABC. On pourra transporter le point d'application de cette force en un point O situé hors du plan ABC ; puis décomposer cette force en trois autres portées sur les droites OA, OB, OC qui forment un véritable trièdre ; on transportera ensuite les composantes en A, B, C.

Supposons que la force F soit située dans le plan ABC ; on prendra sur F un point quelconque O. Ce point O ne peut pas

appartenir aux trois côtés du triangle ABC ; supposons, pour fixer les idées, que le point O soit en dehors du côté AB. On transportera la force F au point O ; puis on la décomposera en deux autres, portées sur les droites OA et OB ; on transportera ensuite les points d'application de ces composantes en A et B.

Dans l'un et l'autre cas, on a remplacé la force F par trois autres appliquées aux points A, B, C, à cette différence près, que, dans le second cas, la force appliquée au point C est nulle.

Cela posé, faisons la même opération pour chaque force du système ; nous obtiendrons ainsi un système composé de forces appliquées soit en A, soit en B, soit en C.

Composons en une seule les forces de chacun de ces groupes ; nous obtiendrons un système composé de trois forces ayant respectivement pour points d'application les points A, B et C.

205. Théorème. — *On peut, par les opérations élémentaires, réduire un système quelconque de forces appliquées à un corps solide à deux forces.*

Réduisons d'abord (204) les forces du système à trois forces AP, BQ, CR (*fig.* 77) ; les deux plans ABQ, ACR, ayant un point commun A, ont au moins une droite commune Ax passant par A ; sur cette droite prenons un point quelconque O. La force BQ et la droite AO sont dans un même plan ; on peut toujours, en transportant au besoin la force Q en un point de sa direction, supposer que le point B d'application de cette force n'est pas sur la droite AO. Traçons BA et BO ; les trois droites BA, BO, BQ étant situées dans un même plan, on pourra décomposer la force Q en deux autres portées sur les droites BA et BO ; transportons ensuite les points d'application de ces composantes en A et en O. On a ainsi remplacé la force Q par deux autres appliquées aux points A et O. On pourra faire la même opération sur

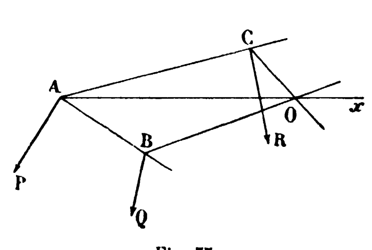


Fig. 77.

la force R. On obtiendra donc un système de forces dont les unes sont appliquées en A, les autres en O ; en composant ensuite les forces appliquées en A, puis les forces appliquées en O, on réduira le système à un autre composé de deux forces.

206. Remarque. — Puisque les opérations élémentaires ne changent ni la résultante générale, ni le moment résultant par rapport à un point, on en conclut que si l'on réduit, par la méthode indiquée, un système de forces appliquées à un corps solide à un système de deux forces, le système formé par ces deux forces a même résultante générale et même moment résultant par rapport à un point que le système primitif.

§ III.

Conditions d'équilibre d'un corps solide libre.

207. Théorème. — *Pour que deux forces appliquées à un corps solide libre soient en équilibre, il faut et il suffit que deux forces soient portées sur la même droite, qu'elles soient égales et dirigées en sens contraire.*

Dorénavant, pour simplifier le langage, nous appellerons *forces opposées* deux forces portées sur la même droite, égales et dirigées en sens contraires. On peut donc énoncer le théorème ainsi :

Pour que deux forces appliquées à un corps solide libre soient en équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient opposées.

La condition est suffisante. (Axiome III, 197.)

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, je vais établir que si les deux forces ne sont pas opposées il n'y a pas équilibre.

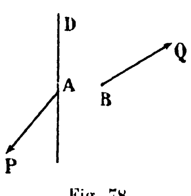


Fig. 78.

Tout d'abord, si les deux forces sont portées sur la même droite, on pourra leur donner le même point d'application et les composer en une seule ; le système, étant équivalent à une force unique qui n'est pas nulle, n'est pas en équilibre.

Si maintenant les deux forces P et Q ne sont pas portées sur

la même droite, je pourrai toujours prendre le point d'application A de la force P en dehors de la droite Q ; par le point A je pourrai mener une droite D (*fig.* 78) perpendiculaire à Q et ne rencontrant pas Q ; si l'équilibre existe, il ne sera pas rompu si l'on fixe la droite D (Axiome II, 187) ; la fixité de la droite D détruit l'effet de la force P ; il ne reste que la force Q ; mais d'après l'axiome IV (199) le corps n'est pas en équilibre.

208. Théorème. — *Pour que la résultante générale et le moment résultant par rapport à un point O d'un système de deux forces soient nuls, il faut et il suffit que ces deux forces soient opposées.*

La condition est évidemment suffisante ; nous allons établir qu'elle est nécessaire.

Remarquons d'abord que si la résultante générale et le moment résultant par rapport à un point O sont nuls, le moment résultant du système par rapport à un point quelconque est nul (Vecteurs, 27).

Cela posé, soient AP et BQ les deux forces, O un point quelconque ; le moment résultant étant nul, on aura, en prenant les moments par rapport au point O,

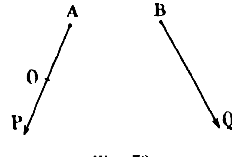


Fig. 79.

$$(m'P) + (m'Q) = 0.$$

Prenons, en particulier (*fig.* 79), le point O sur la droite P ; le moment de P est nul ; donc le moment de Q sera nul ; par conséquent la droite Q doit passer par O. Cette propriété devant avoir lieu quelle que soit la position du point O sur la droite P, il faut que les droites P et Q soient confondues.

La résultante générale étant nulle, la somme des projections des forces P et Q sur un axe quelconque est nulle ; projetons, en particulier, sur la droite qui porte les forces P et Q ; la somme des projections devant être nulle, il faut que les forces P et Q soient égales et dirigées en sens contraire.

209. Remarque. — Des deux théorèmes précédents, on déduit la propriété suivante :

Pour que deux forces appliquées à un corps solide libre soient en équilibre, il faut et il suffit que leur résultante générale et leur moment résultant par rapport à un point soient nuls.

210. Théorème. — *Pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide libre soit en équilibre, il faut et il suffit que sa résultante générale et son moment résultant par rapport à un point soient nuls.*

En effet, soit A un système quelconque de forces appliquées au corps solide ; le système A est équivalent à un système B composé de deux forces ; les systèmes A et B ont même résultante générale et même moment résultant par rapport à un point (206) ; or, pour que le système B soit en équilibre, il faut et il suffit (209) que cette résultante générale et ce moment résultant soient nuls ; donc, pour que le système A soit en équilibre, il faut et il suffit que sa résultante générale et son moment résultant par rapport à un point soient nuls.

211. Expression analytique des conditions d'équilibre. — Soient F_1, $F_2, \ldots,$ F_n les forces appliquées à un corps solide, A_1, $A_2, \ldots,$ A_n leurs points d'application ; rapportons le système à trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz formant un trièdre trirectangle de sens positif ; soient OR la résultante générale de ce système de forces, OG le moment résultant par rapport au point O ; désignons par X_1, Y_1, Z_1 les projections de la force F_1 sur les axes, par X_2, Y_2, Z_2 celles de la force F_2, etc., par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A_1, par x_2, y_2, z_2 celles du point A_2, etc., enfin par X, Y, Z les projections de OR sur les axes et par L, M, N celles de OG.

En désignant par L_1, M_1, N_1 les moments de F_1 par rapport aux axes, par L_2, M_2, N_2 ceux de F_2, etc., on aura d'abord (Vecteurs, 21)

$$(1)\quad L_1 = y_1Z_1 - z_1Y_1, \quad M_1 = z_1X_1 - x_1Z_1, \quad N_1 = x_1Y_1 - y_1X_1$$

et, d'une manière générale,

$$(1)'\quad L_k = y_kZ_k - z_kY_k, \quad M_k = z_kX_k - x_kZ_k, \quad N_k = x_kY_k - y_kX_k.$$

On aura ensuite (201)

$$(2)\qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_1^n X_k, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum_1^n Y_k, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_1^n Z_k; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \sum_1^n L_k, \\ M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_1^n M_k, \\ N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n = \sum_1^n N_k. \end{cases}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que OR et OG soient nuls, c'est-à-dire que leurs projections sur les axes soient nulles. On devra donc avoir

$$(4)\qquad X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0,\quad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0.$$

Les six équations (4) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un corps solide complètement libre soit en équilibre.

212. Remarque. — Si un corps solide complètement libre est en équilibre, la résultante générale OR est nulle ; donc (200) :

Si un système de forces appliquées à un corps solide complètement libre est en équilibre, la somme des projections des forces du système sur un axe quelconque est nulle.

Dans les mêmes conditions, le moment résultant OG par rapport à un point quelconque O est nul ; donc (200) :

Si un système de forces appliquées à un corps solide libre est en équilibre, la somme des moments des forces du système par rapport à un axe quelconque est nulle.

213. Équilibre de trois forces appliquées à un corps solide libre. — Soient P, Q, R trois forces appliquées à un corps solide libre ; cherchons dans quels cas ces trois forces peuvent être en équilibre. Supposons que l'équilibre existe ; prenons sur la droite P un point quelconque A, sur la droite Q un point quel-

conque B (*fig.* 80); la somme des moments des trois forces par rapport à la droite AB doit être nulle; or, les moments de

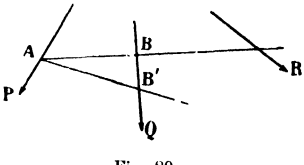


Fig. 80.

P et de Q sont nuls, donc le moment de R par rapport à la droite AB doit être nul, c'est-à-dire que R doit rencontrer AB ou lui être parallèle. Si nous prenons maintenant un autre point B′ sur la droite Q, R devra aussi rencontrer AB′ ou lui être parallèle; R doit donc être situé dans le plan ABB′ ou passer par A. Cette dernière hypothèse peut être écartée, puisqu'on peut choisir arbitrairement le point A sur la force P; les forces R et Q doivent donc être situées dans un même plan; et ce plan doit contenir un point quelconque A de la force P; donc:

Les trois forces P, Q, R *doivent être situées dans un même plan.*

Ce résultat étant acquis, nous distinguerons deux cas:

1° Deux des trois forces P, Q, R, par exemple P et Q, se rencontrent en un point O. La somme des moments des trois forces par rapport au point O doit être nulle; or, les moments des forces P et Q sont nuls, donc le moment de R doit être nul; par conséquent R passe par O; les trois forces sont concourantes (*fig.* 81).

Il est clair que, dans ces conditions, si la résultante des trois force est nulle, il y a équilibre.

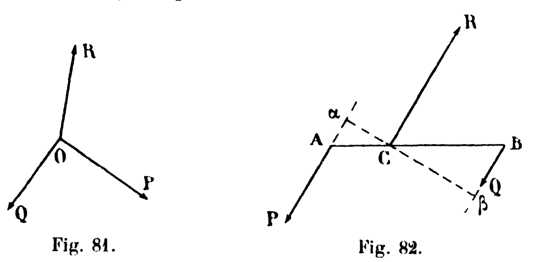


Fig. 81. Fig. 82.

2° Les trois forces P, Q, R sont parallèles (*fig.* 82).

Si l'on projette sur un axe parallèle à la direction commune des forces, la somme des projections doit être nulle; par consé-

quent, toutes les forces n'ont pas le même sens ; deux d'entre elles, P et Q par exemple, seront dirigées dans un sens ; la force R sera dirigée en sens contraire. Pour que la somme des projections des trois forces sur l'axe considéré soit nulle, il faut que R soit égale à la somme des forces P et Q.

Il reste à trouver le point C où la force R coupe la droite AB qui joint les points d'application des forces P et Q. La somme des moments des trois forces par rapport au point C doit être nulle ; le moment de R étant nul, les moments des forces P et Q doivent être égaux et de sens contraires, ce qui exige que le point C soit placé entre A et B. Abaissons de ce point C des perpendiculaires $C\alpha$, $C\beta$ sur les forces P et Q. On devra avoir

$$P \times C\alpha = Q \times C\beta.$$

ou, ce qui revient au même,

$$P \times CA = Q \times CB.$$

Cette relation détermine la position du point C.

Nous allons montrer que, réciproquement, si ces conditions sont remplies, les trois forces se font équilibre. D'abord la résultante générale du système est nulle à cause de la condition $R = P + Q$; ensuite, le moment résultant du système par rapport au point C est nul, car le moment de R est nul et les moments de P et Q sont égaux et de sens contraires.

214. Équilibre d'un système de forces parallèles appliquées à un solide libre. — Soit une série de forces parallèles F_1, F_2, ..., F_n appliquées à un corps solide libre et A_1, A_2, ..., A_n leurs points d'application ; choisissons l'axe des z parallèle à la direction commune des forces. Si nous conservons les notations du n° 211, il faudra supposer nulles les quantités X_k et Y_k ; de plus, chaque force étant parallèle à l'axe des z, son moment par rapport à cet axe est nul ; les quantités N_k sont donc nulles. Il en résulte que dans ce cas les quantités désignées par X, Y, N (211) sont nulles. On a ensuite

$$L_k = y_k Z_k, \qquad M_k = -x_k Z_k.$$

Les six équations d'équilibre se réduisent donc aux trois suivantes :

$$Z = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$

c'est-à-dire $$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_1^n Z_k = 0,$$
$$x_1Z_1 + x_2Z_2 + \cdots + x_nZ_n = \sum_1^n x_kZ_k = 0,$$
$$y_1Z_1 + y_2Z_2 + \cdots + y_nZ_n = \sum_1^n y_kZ_k = 0.$$

215. Équilibre d'un système de forces situées toutes dans un même plan et appliquées à un solide libre. — Soit P le plan dans lequel sont situées les forces. Prenons comme origine un point quelconque O de ce plan ; formons un système d'axes tel que Ox, Oy soient situés dans le plan P et, par conséquent, l'axe Oz perpendiculaire à ce plan. Chaque force du système étant située dans le plan P, sa projection sur Oz est nulle ; il en est de même de ses moments par rapport à Ox et Oy ; par conséquent, dans ce cas, toutes les quantités Z_k, L_k, M_k sont nulles ; il en est de même des quantités Z, L, M ; donc les équations d'équilibre (211) se réduisent aux trois équations suivantes :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad N = 0.$$

Remarquons que, toutes les forces étant situées dans le plan P, le moment de chacune d'elles par rapport à un point O de ce plan est normal au plan ; N représente donc la somme des moments de toutes les forces par rapport au point O.

On peut donc dire :

Pour qu'un système de forces situées dans un plan et appliquées à un solide libre soit en équilibre, il faut et il suffit :

1° *que la somme des projections de ces forces sur chacune des deux droites rectangulaires Ox et Oy prises arbitrairement dans ce plan soit nulle ;*

2° *que la somme des moments de ces forces par rapport au point O soit nulle.*

§ IV.

Conditions d'équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre.

216. Remarque I. — Soient A un système de forces, OR sa résultante générale, OG son moment résultant par rapport au

point O ; la résultante générale OR′ du système —A est égale et opposée à OR ; de même, le moment résultant OG′ du système —A est égal et opposé à OG.

Il suffit pour l'établir de se reporter à la définition de la résultante générale et du moment résultant par rapport à un point (Vecteurs, 22, 23).

217. Remarque II. — Soient A et B deux systèmes quelconques de forces appliquées à un corps solide, OR la résultante générale du système A, OG son moment résultant par rapport au point O, OR_1 et OG_1 les vecteurs analogues du système B ; le système A + B a pour résultante générale la somme géométrique de OR et de OR_1, pour moment résultant par rapport au point O la somme géométrique de OG et de OG_1.

Il suffit, pour l'établir, de se reporter à la définition de la résultante générale et du moment résultant par rapport à un point (Vecteurs, 22, 23).

218. Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même résultante générale et même moment résultant par rapport à un point.*

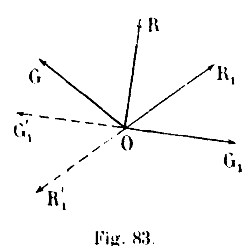


Fig. 83.

Soient, en effet, A et B deux systèmes quelconques de forces appliquées au corps solide, OR la résultante générale du système A, OG son moment résultant par rapport au point O, OR_1 et OG_1 les vecteurs analogues pour le système B (*fig.* 83).

Le système —B a pour résultante générale OR'_1 et pour moment résultant par rapport au point O, OG'_1 ; les vecteurs OR'_1 et OG'_1 étant respectivement opposés à OR_1 et OG_1 (216).

Le système composé des forces de A et de —B admet pour résultante générale la somme géométrique de OR et OR'_1 et pour moment résultant par rapport au point O la somme géométrique de OG et de OG'_1 (217).

Cela posé, si les systèmes A et B sont équivalents, le système

formé de A et de $-B$ est en équilibre (193); par conséquent, d'une part la somme géométrique de OR et de OR_1' doit être nulle, d'autre part la somme géométrique de OG et de OG_1' doit aussi être nulle ; OR et OG coïncident donc respectivement avec OR_1 et OG_1.

219. Expression analytique des conditions d'équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre. — Soient A et B deux systèmes équivalents de forces appliquées à un corps solide libre. Rapportons chacun de ces systèmes à trois axes de coordonnées rectangulaires ; désignons par X, Y, Z la somme des projections des forces du système A sur les axes Ox, Oy, Oz, par L, M, N la somme des moments des forces de ce système par rapport aux mêmes axes; soient enfin X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 les quantités analogues pour le système B. En écrivant que OR_1 et OG_1 sont respectivement identiques à OR et à OG, on aura les équations

$$X = X_1, \qquad Y = Y_1, \qquad Z = Z_1,$$
$$L = L_1, \qquad M = M_1, \qquad N = N_1.$$

Ces six équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux systèmes de forces soient équivalents.

220. Remarque. — Si deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre sont équivalents, leur résultante générale est la même ; donc :

Si deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre sont équivalents, les sommes des projections des forces de chaque système sur un axe sont égales.

Dans les mêmes conditions, les moments résultants des deux systèmes par rapport à un point quelconque sont identiques ; donc :

Si deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre sont équivalents, les sommes des moments des forces de chaque système par rapport à un axe quelconque sont égales.

En remarquant, d'autre part, que le moment relatif d'une force par rapport à un vecteur quelconque ne diffère que par un facteur constant du moment de cette force par rapport à

l'axe qui porte ce vecteur (*Traité de Géométrie,* tome I, n° 732), et en remarquant en outre (*Traité de Géométrie,* tome I, n° 735) qu'il y a une relation simple entre le moment relatif de deux vecteurs et le volume du tétraèdre construit sur ces deux vecteurs, on peut énoncer le résultat suivant :

Si deux systèmes de forces appliquées à un corps solide libre sont équivalents, et si AB *est un vecteur quelconque, la somme des volumes des tétraèdres construits avec* AB *et chacune des forces du premier système est égale à la somme des volumes des tétraèdres construits avec* AB *et chacune des forces du second système.*

221. Théorème. — *Si deux systèmes de forces appliquées à un solide libre sont équivalents, on peut passer de l'un à l'autre par les opérations élémentaires.*

Soient A et B deux systèmes de forces équivalents ; je dis qu'on peut passer de A à B par les opérations élémentaires. En effet, partant de A, en effectuant un certain nombre de fois la première opération, on pourra lui ajouter tous les vecteurs des systèmes B et — B ; on obtient ainsi un système composé des vecteurs de A, de B et de — B ; considérons à part la portion formée de A et de — B ; on pourra réduire (§ II) cette portion à deux forces ; or, A et B étant équivalents, A et — B sont en équilibre et les deux forces auxquelles on peut réduire le système A, — B doivent être opposées ; en les supprimant, il ne restera plus que le système B.

§ V.

Couples.

222. Définition. — Un couple est un système de deux forces égales, situées sur des droites parallèles et dirigées en sens contraires.

Le plan de ces deux forces est le *plan du couple* ; la distance des deux forces parallèles est le *bras de levier* du couple.

223. Axe d'un couple. — Un couple est un système dont la

résultante générale est nulle ; il en résulte que le moment résultant du système est le même (Vecteurs, 27) pour tous les points de l'espace. Pour trouver ce moment résultant, il suffit donc de le trouver pour un point particulier. Prenons un point O situé sur la force AP du couple AP, BQ (*fig.* 84) ; le moment de la force P est nul ; le moment résultant OG du système est donc égal au moment de la force Q par rapport au point O ; ce moment est perpendiculaire au plan OBQ qui est le plan du couple ; sa grandeur est le produit de la force Q par le bras de levier OH ; enfin, il est dirigé dans un sens tel que les trois directions OH, BQ, OG soient celles des arêtes d'un trièdre positif.

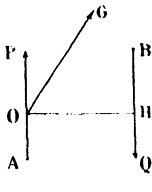


Fig. 84.

224. Corollaire. — *Deux couples dont les axes ont même grandeur géométrique sont équivalents.*

En effet, ces couples forment deux systèmes de forces ayant chacun une résultante générale nulle et même moment résultant ; donc ils sont équivalents (218).

Il en résulte (221) qu'on peut transformer ces deux systèmes de forces l'un dans l'autre par les opérations élémentaires.

225. Théorème. — *Tout système de forces dont la résultante générale est nulle est équivalent à un couple.*

En effet, soit S un système de forces dont la résultante générale est nulle et dont le moment résultant est OG (*fig.* 85) ; dans le plan II mené par O perpendiculairement à OG, prenons deux directions rectangulaires Ox, Oy telles que le trièdre $OxyG$ soit de sens positif ; sur le prolongement de Oy, prenons une longueur arbitraire OA, puis sur Ox un point H tel que

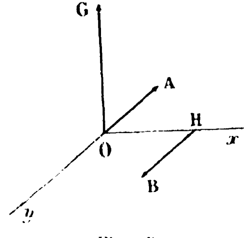


Fig. 85.

$$OA \times OH = OG.$$

A partir du point H, prenons sur une parallèle à Oy une longueur HB égale à OA.

Le système formé par le couple OA, HB est un système dont la résultante générale est nulle et dont le moment résultant est OG. Le couple est donc équivalent (218) au système S.

226. Composition des couples. — Considérons un nombre quelconque de couples C_1, C_2, ..., C_n ; l'ensemble des forces de ces couples forme un système dont la résultante générale est nulle ; ce système est donc équivalent à un couple (225). Pour avoir l'axe de ce couple, il faut faire la somme géométrique des moments de toutes les forces par rapport à un point quelconque O. Pour effectuer cette somme, on peut procéder ainsi : faire d'abord la somme des moments des deux forces du couple C_1, ce qui donne l'axe OG_1 de ce couple ; puis celle des moments des deux forces du couple C_2, ce qui donne l'axe OG_2 de ce couple, etc... ; et ensuite faire la somme OG de OG_1, OG_2, ..., OG_n. Donc :

Un nombre quelconque de couples forme un système équivalent à un couple unique appelé couple résultant. L'axe du couple résultant est la somme géométrique des axes des couples donnés.

Les couples donnés sont les *couples composants* du couple résultant.

La loi de composition et de décomposition des couples, quand on introduit leurs axes, est la même que celle des forces appliquées à un point.

227. Remarque. — *Si la somme géométrique des axes de plusieurs couples est nulle, ces couples forment un système de forces en équilibre.*

§ VI.

Réduction des forces appliquées à un corps solide.

228. Théorème. — *Un système quelconque de forces appliquées à un corps solide peut se réduire à une force unique passant par un point arbitraire O et à un couple.*

En effet, soient OR la résultante générale et OG le moment résultant d'un système S de forces par rapport au point O ; soit P un couple qui a pour axe OG. Le système formé de la force OR et du couple P admet comme résultante générale OR et comme moment résultant par rapport au point O le vecteur OG ; donc il est équivalent au système S (218).

229. Théorème. — *La réduction d'un système de forces à une force unique passant par un point donné* O *et à un couple ne peut se faire que d'une seule manière. (Dans cet énoncé on ne considère pas comme distincts deux couples équivalents.)*

En effet, supposons qu'on ait réduit un système S à un système composé de la force OR′ et d'un couple P′ dont l'axe est OG′ ; ce dernier système a pour résultante générale OR′ et pour moment résultant par rapport au point O, OG′ ; ce système étant équivalent au système S, il faut (218) que OR′ coïncide avec OR et OG′ avec OG ; donc la réduction indiquée n'est possible que d'une seule manière.

230. Variation du moment résultant par rapport à un point. — Considérons un système quelconque de forces S ; on peut le réduire à un système équivalent composé d'une force OR et d'un couple P d'axe OG (*fig.* 86).

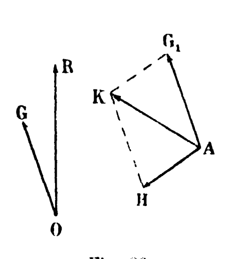


Fig. 86.

Le moment résultant du système S par rapport à un point quelconque A est le même que celui du système réduit. Ce dernier est la somme géométrique du moment AK de la force OR et du moment AG_1 du couple ; ce moment AG_1 a même grandeur géométrique que OG ; donc :

Soient OR *la résultante générale,* OG *le moment résultant par rapport au point* O *d'un système de forces, le moment résultant* AK *du système par rapport à un point quelconque* A *est la somme géométrique de deux vecteurs : l'un* AG_1 *est équipollent à* OG, *l'autre* AH *est le moment de* OR *par rapport au point* A.

(Autre démonstration : Vecteurs, 24.)

231. Corollaires. — De ce théorème nous avons déduit (Vecteurs, 25, 26, 27) des corollaires que nous allons rappeler ici.

1° Si l'on connaît la résultante générale OR et le moment résultant OG par rapport au point O d'un système de forces, on pourra obtenir le moment résultant du système par rapport à un point quelconque.

2° Si un point A se déplace sur une parallèle à la résultante générale, le moment résultant du système conserve la même grandeur géométrique.

3° Si la résultante générale est nulle, le moment résultant du système a la même grandeur géométrique en tous les points de l'espace.

232. Axe central d'un système de forces. — Plaçons-nous dans le cas où la résultante générale OR n'est pas nulle ; cherchons s'il existe des points A pour lesquels le moment résultant AH est parallèle à OR (*fig.* 87).

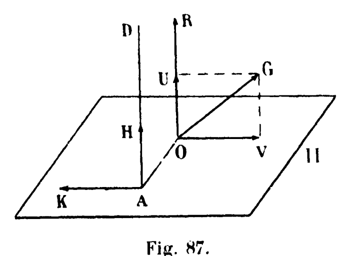


Fig. 87.

Comme le moment résultant reste le même quand on se déplace sur une parallèle à OR, on peut se borner à étudier les points A qui sont situés dans le plan II mené par O perpendiculairement à OR. Décomposons OG en deux vecteurs : l'un U dirigé suivant OR et l'autre V perpendiculaire à OR ; soit AK le moment de OR par rapport au point A. On aura (230)

$$(AH) = (OG) + (AK) = (OU) + (OV) + (AK).$$

OU est parallèle à OR ; OV et AK sont perpendiculaires à OR ; pour que la résultante AH soit parallèle à OR, il faut et il suffit que les deux composantes OV et AK se détruisent ; ceci exige que le trièdre OVAR soit un trièdre trirectangle de sens positif, ce qui détermine sans ambiguïté la direction OA. On devra avoir en outre

$$OV = AK = OR \times OA.$$

ce qui détermine la longueur OA. Il y a donc dans le plan II

un point A et un seul pour lequel AH est parallèle à OR. Tous les points qui possèdent la même propriété sont situés sur la droite D menée par A parallèlement à OR. Cette droite D est l'*axe central* du système de forces.

233. Remarque. — L'axe central est le lieu des points O pour lesquels OG et OR sont portés sur la même droite ; donc

L'axe central est le lieu des points O tels que, si l'on réduit le système à un couple et à une force passant par O, la force soit perpendiculaire au plan du couple.

234. Propriétés de l'axe central. — Soient OC (*fig.* 88) l'axe central d'un système de forces, OR la résultante générale, OG le moment résultant par rapport à un point O de l'axe ; considérons un point quelconque A et menons de ce point la perpendiculaire AP à l'axe.

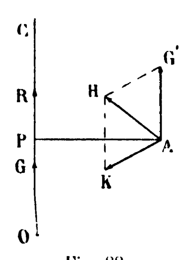


Fig. 88.

Le moment résultant AH du système par rapport au point A est (230) la somme géométrique de deux vecteurs : 1° un vecteur AG′ ayant même grandeur géométrique que OG ; 2° un vecteur AK égal au moment de OR par rapport au point A le vecteur AK est perpendiculaire à AG′ et sa grandeur est égale au produit

$$OR \times AP.$$

Les composantes AG′ et AK étant rectangulaires, on aura

$$\overline{AH}^2 = \overline{AG'}^2 + \overline{AK}^2,$$

ou

$$AH^2 = \overline{OG}^2 + OR^2 \times \overline{AP}^2.$$

Cette dernière formule met en évidence les résultats suivants :

1° *L'axe central est le lieu des points pour lesquels le moment résultant est minimum,*

ou encore

Si l'on réduit le système de forces à un couple et à une force passant par un point donné O, l'axe central est le lieu de ces points O pour lesquels l'axe du couple est minimum.

2° *Le lieu des points pour lesquels le moment résultant a une grandeur donnée est un cylindre de révolution qui a pour axe l'axe central.*

235. Remarque. — Puisque AK est perpendiculaire à l'axe central, la projection de AH sur cet axe (*fig.* 88) est égale à AG′ ou à OG ; donc :

La projection sur l'axe central du moment résultant par rapport à un point quelconque A est égale au moment résultant minimum.

236. Théorème. — *Pour qu'un système de forces soit équivalent à une force unique, il faut et il suffit : 1° que la résultante générale ne soit pas nulle ; 2° que le moment résultant OG par rapport à un point O soit nul ou perpendiculaire à la résultante générale.*

1° *Les conditions sont nécessaires.*

En effet, si le système est équivalent à une seule force AF, la résultante générale OR du système n'est pas nulle, puisqu'elle est équipollente à AF ; si le point O est placé sur AF, le moment résultant OG est nul ; si le point O est placé en dehors de AF, le moment résultant OG est perpendiculaire au plan OAF et par suite à la résultante générale OR.

2° *Les conditions sont suffisantes.*

Supposons, en premier lieu, que la résultante générale OR ne soit pas nulle et que le moment résultant OG soit nul ; le système est évidemment équivalent à la force OR.

Supposons, en second lieu, que la résultante générale OR et le moment résultant OG par rapport au point O ne soient pas nuls, mais que ces deux droites soient rectangulaires. Il existera (Vecteurs, 14) un vecteur ayant OR pour grandeur géométrique et OG pour moment résultant par rapport au point O. La force représentée par ce vecteur est équivalente au système donné (218).

On peut réunir les deux cas en un seul en disant que OR ne doit pas être nul et que la projection de OG sur OR doit être nulle.

Quand un système de forces est équivalent à une seule force, on dit qu'il admet une *résultante.*

237. Expression analytique des conditions qui expriment qu'un système de forces a une résultante. — Désignons toujours par X, Y, Z les projections de la résultante générale OR sur les axes Ox, Oy, Oz, par L, M, N les projections du moment résultant OG sur les mêmes axes. Pour projeter OG sur une droite quelconque D, il suffit de faire la somme des projections de ses trois composantes ; la valeur de cette projection sera donc

$$L \cos(x, D) + M \cos(y, D) + N \cos(z, D).$$

Pour évaluer la projection de OG sur OR, il suffit donc de calculer les cosinus des angles que fait OR avec les axes. Or, on a (Vecteurs, 6), en désignant par R la grandeur de OR,

$$\cos(x, OR) = \frac{X}{R}, \qquad \cos(y, OR) = \frac{Y}{R}, \qquad \cos(z, OR) = \frac{Z}{R}.$$

Donc, la projection de OG sur OR est

$$\frac{LX + MY + NZ}{R}.$$

Remarquons, d'autre part, que la condition nécessaire et suffisante pour que R ne soit pas nul est que l'une au moins des trois quantités X, Y, Z soit différente de zéro ; donc :

Pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide admette une résultante, il faut et il suffit :

1° *que l'une au moins des trois quantités* X, Y, Z *soit différente de zéro ;*

2° *que l'on ait la relation*

$$LX + MY + NZ = 0.$$

238. Remarque. — Si un système est équivalent à une force unique AF, l'axe central du système est la droite AF ; le moment résultant minimum est nul.

239. Résumé. — Le tableau suivant résume la discussion de ce chapitre :

1° L'une au moins des quantités X, Y, Z est différente de zéro ; la résultante générale n'est pas nulle ;

Si $LX + MY + NZ = 0$, le système a une résultante.

Si $LX + MY + NZ \neq 0$, le système n'a pas de résultante.

2° Les trois quantités X, Y, Z sont nulles ; la résultante générale est nulle.

Si l'une au moins des quantités L, M, N est différente de zéro, le système est équivalent à un couple dont l'axe a pour projections sur les axes de coordonnées L, M, N.

Si les trois quantités L, M, N sont nulles, le système est en équilibre.

§ VII.

Forces situées dans un même plan.

240. Résultante générale. — Moment résultant. — Considérons des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ situées dans un plan P ; soit O un point de ce plan ; les forces $OF'_1, OF'_2, \ldots, OF'_n$, qui ont respectivement même grandeur géométrique que les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, sont situées dans le plan P ; par conséquent la résultante générale OR, qui est la résultante de $OF'_1, OF'_2, \ldots, OF'_n$, est située dans le plan P. De même, les moments $OG_1, OG_2, \ldots, OG_n$ des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ par rapport au point O sont normaux au plan P ; le moment résultant OG du système par rapport au point O est la résultante de $OG_1, OG_2, \ldots, OG_n$; donc OG est perpendiculaire au plan P au point O.

241. Discussion. — Prenons toujours le point O dans le plan P ; si OR n'est pas nul, OG sera nul ou perpendiculaire à OR ; donc (236) le système a une résultante qui est située dans le plan P.

Si OR est nul et OG différent de zéro, le système sera équivalent à un couple ayant pour axe OG ; le plan de ce couple est parallèle au plan P.

Si OR et OG sont nuls, le système est en équilibre (210).

242. Discussion analytique. — Prenons comme origine des axes de coordonnées un point O du plan P ; supposons les

axes Ox, Oy situés dans le plan P et, par conséquent, l'axe Oz normal à ce plan. Les quantités Z, L, M (213) sont nulles ; il en résulte que la condition

$$LX + MY + NZ = 0$$

est toujours vérifiée. Donc (239) :

Si l'une au moins des quantités X, Y est différente de zéro, le système admet une résultante ;

Si X et Y sont nuls, mais N différent de zéro, le système est équivalent à un couple dont l'axe est normal au plan et égal à N ;

Si X, Y, N sont tous nuls, le système est en équilibre.

§ VIII.

Forces parallèles.

243. Composition de deux forces parallèles et de même sens. — Soient AP et BQ deux forces parallèles et de même sens (*fig.* 89).

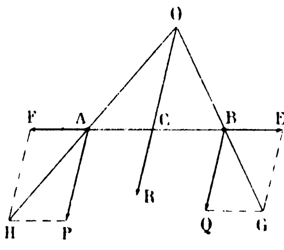


Fig. 89.

Adjoignons au système les deux forces opposées AF et BE (202) ; AF et AP ont une résultante AH ; BQ et BE une résultante BG. Les deux droites AH et BG se rencontrent en O ; on pourra transporter en O le point d'application des forces AH et BG et composer ensuite ces deux forces en une seule OR située dans le plan des forces P et Q et que nous allons déterminer.

La force OR forme un système équivalent aux deux forces AP et BQ, et par suite, en projetant sur un axe quelconque, on aura

$$\text{pr. OR} = \text{pr. AP} + \text{pr. BQ}.$$

Si l'on projette sur une direction perpendiculaire à AP et à BQ, les projections de AP et de BQ sont nulles ; donc la projection de OR est nulle ; par conséquent OR est parallèle aux

droites AP, BQ. En projetant sur une droite parallèle à AP, on trouve

$$OR = AP + BQ.$$

Il suffit donc maintenant de trouver un point de la droite OR ; déterminons le point C où OR rencontre AB.

Pour un point quelconque de l'espace, on a

$$m'.\, OR = (m'.\, AP) + (m'.\, BQ).$$

Appliquons cette propriété au point C ; le moment de OR est nul, donc les moments de AP et de BQ doivent être égaux et de sens contraires ; les moments étant de sens contraires, le point C est placé entre A et B ; ces moments ayant même grandeur, on devra avoir

$$P \times CA = Q \times CB.$$

Si l'on convient de donner des signes aux segments $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$, cette relation s'écrit

$$P \times \overline{CA} + Q \times \overline{CB} = 0 ;$$

donc :

Deux forces parallèles et de même sens AP, BQ *sont équivalentes à une force unique* OR *qu'on appelle leur résultante. La résultante est parallèle aux forces données, égale à leur somme et rencontre la droite qui joint les points d'application* A *et* B *des forces* P *et* Q *en un point* C, *tel que* (si l'on tient compte des signes des segments)

$$P \times \overline{CA} + Q \times \overline{CB} = 0.$$

Les forces P et Q sont aussi appelées les *composantes* de a force R.

244. Remarque I. — Quand les forces P et Q tournent autour de leurs points d'application A et B en conservant leur grandeur et en restant parallèles, le point C ne change pas. La résultante OR conserve donc sa grandeur et tourne autour du point C. C'est à ce point C que nous donnerons le nom de *point d'application* de la résultante. Dorénavant, quand nous composerons deux forces parallèles, nous placerons toujours le point origine de la résultante à son point d'application.

245. Remarque II. — Le point d'application C de la résultante ne dépend que du rapport des forces P et Q ; il ne change donc pas si l'on remplace les forces P et Q par d'autres appliquées aux mêmes points A et B, parallèles, de même sens, ayant pour grandeur kP, kQ, k étant un facteur quelconque.

246. Décomposition d'une force en deux forces parallèles. — Entre les deux forces parallèles P et Q appliquées en A et B et leur résultante R appliquée en C (*fig.* 90) existent les relations

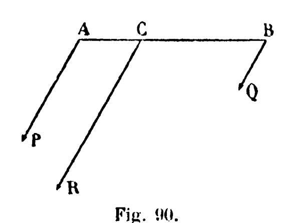


Fig. 90.

$$R = P + Q,$$
$$P \times AC = Q \times BC,$$

(en considérant AC et BC comme des longueurs absolues non affectées d'un signe). On en déduit

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Ces relations permettent de résoudre facilement les problèmes suivants :

1° *Étant donnés les points* A, B, C *et la force* R, *trouver les forces* P *et* Q.

On a en effet

$$P = R \times \frac{BC}{AB}, \qquad Q = R \times \frac{AC}{AB}.$$

2° *Étant donnés les points* A *et* C, *les forces* P *et* R, *trouver le point* B *et la force* Q.

On a d'abord

$$Q = R - P,$$

puis

$$BC = AC \cdot \frac{P}{Q}.$$

247. Composition de deux forces parallèles et de sens contraires. — Nous supposons que les deux forces n'ont pas la même grandeur, c'est-à-dire qu'elles ne forment pas un couple. Soient alors (*fig.* 91) AP et BQ les deux forces ; AP la plus

grande. Je décompose la force AP en deux autres (246), dont l'une, BQ', est opposée à BQ et dont l'autre est CR. Cette force CR a été déterminée dans le numéro précédent ; on a d'abord

$$R = P - Q' = P - Q,$$

et ensuite

$$CA = AB \times \frac{Q}{R},$$

ou encore

$$CA \times P = CB \times Q ;$$

Fig. 91.

donc :

Deux forces parallèles AP, BQ *inégales, de sens contraires, sont équivalentes à une force unique qu'on appelle leur résultante. La résultante est parallèle aux deux forces, dirigée dans le sens de la plus grande, égale à leur différence ; elle rencontre la droite qui joint les points d'application* A *et* B *des deux forces en un point* C *tel que*

$$P \times CA = Q \times CB.$$

Il faut remarquer que le point C est en dehors du segment AB et plus rapproché du point d'application A de la plus grande force que du point d'application B de la plus petite.

248. Remarque. — On peut répéter ici, mot à mot, les deux remarques des numéros 244 et 245. Le point C qui vient d'être déterminé s'appelle aussi le *point d'application* de la résultante ; dorénavant, quand nous appliquerons cette règle de composition de deux forces parallèles et de sens contraires, nous placerons toujours le point d'application de la résultante à ce point C qui est déterminé par la règle précédente (247).

249. Composition de forces parallèles et de même sens. — Considérons des forces parallèles et de même sens $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dont les points d'application $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont fixés ; plaçons ces forces dans un ordre quelconque. Composons la première force avec la seconde, puis la résultante obtenue avec la troisième, puis cette nouvelle résultante avec la quatrième, etc..., en prenant toujours les forces dans l'ordre où elles sont placées

et en choisissant toujours comme point d'application de la résultante de deux forces parallèles celui qui est donné par la règle du n° 245. On arrivera ainsi à une force unique R, parallèle aux forces données, égale à leur somme et appliquée en un certain point G. Donc :

Un système quelconque de forces parallèles et de même sens est équivalent à une force unique, ayant même sens que les forces données et égale à leur somme.

250. Remarque. — En appliquant de proche en proche la remarque du n° 244, on voit que si toutes les forces données tournent autour de leurs points d'application en conservant leur grandeur et en restant parallèles, la résultante R tourne autour du point G.

Cela posé, si l'on compose les forces données en les plaçant dans un autre ordre, on arrivera à une résultante R′ appliquée à un point G′. D'après ce qui précède, R′ a la même grandeur et la même direction que R ; je dis de plus que G′ coïncide avec G.

En effet, les forces R et R′ étant toutes deux équivalentes au système donné sont équivalentes ; ces forces sont, par conséquent, portées sur une même droite qui est parallèle aux forces données ; il en résulte que la droite GG′ est parallèle à la direction commune des forces. Mais les points G et G′ ne changent pas si l'on change la direction de toutes les forces en conservant leurs points d'application, leur grandeur et leur parallélisme ; la droite GG′ devrait donc être parallèle à une direction quelconque, ce qui est impossible ; donc les points G et G′ sont confondus.

Ce point G est le *point d'application* du système de forces parallèles. Dorénavant, quand nous composerons un nombre quelconque de forces parallèles et de même sens, nous prendrons toujours comme point d'application de la résultante le point qui est déterminé par la règle précédente.

Partageons le système donné en plusieurs groupes ; composons les forces de chacun de ces groupes, puis composons ensuite les résultantes partielles ; le point d'application de la résultante ainsi obtenue est le point d'application G du système. Le

raisonnement est identique à celui qui vient d'être fait plus haut.

251. Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Considérons des forces parallèles à une droite D, dirigées les unes dans un sens, les autres dans l'autre ; fixons sur la droite D une direction positive ; nous donnerons le signe + aux forces dirigées dans le sens positif, le signe — aux autres.

Cela posé, composons en une seule toutes les forces dirigées dans le sens positif ; nous obtenons une résultante R_1 égale à leur somme et appliquée en un point G_1. Composons de même toutes les forces dirigées dans le sens négatif ; nous obtenons une résultante R'_1, égale à leur somme et appliquée en un point G'_1 ; les droites R_1 et R'_1 sont parallèles et de sens contraires. Cela posé, nous considérerons les cas suivants :

1° *La somme algébrique des forces données n'est pas nulle.* Les forces R_1 et R'_1 n'ont pas la même grandeur ; elles admettent (247) une résultante R appliquée en un point G. Cette résultante R est parallèle à la droite D ; sa valeur algébrique est égale à la somme des valeurs algébriques des forces données.

Si toutes les forces données tournent autour de leurs points d'application en restant toujours parallèles à une même droite et en conservant leur grandeur algébrique, R_1 et R'_1 tourneront respectivement autour de G_1 et G'_1 et, par suite, R tournera autour de G. Le point G ainsi construit est le *point d'application* du système de forces parallèles.

2° *La somme algébrique des forces est nulle.*

Les forces R_1 et R'_1 sont égales et de sens contraires ; deux cas peuvent se présenter :

I. G_1 et G'_1 *sont distincts.*

Si la droite D est parallèle à $G_1G'_1$, les forces R_1 et R'_1 sont opposées ; le système est en équilibre.

Si la droite D n'est pas parallèle à $G_1G'_1$, les deux forces R_1 et R'_1 forment un couple ; le système est équivalent à un couple.

II. G_1 et G'_1 *sont confondus.*

Les forces R_1 et R'_1 sont opposées ; le système est en équilibre. Il reste encore en équilibre si toutes les forces tournent

autour de leurs points d'application en conservant leurs grandeurs algébriques et en restant parallèles à une même droite, ou encore si, les forces conservant une direction constante et une grandeur constante, on déplace d'une manière quelconque le corps solide.

On dit alors que l'équilibre est *astatique*.

252. Centre d'un système de forces parallèles. — Considérons le cas où la somme des forces n'est pas nulle ; dans ce cas, le système admet une résultante R. On sait (251) que, si toutes les forces tournent autour de leurs points d'application en restant parallèles à une même droite et en conservant leur grandeur algébrique, la résultante R tourne autour d'un point G. Ce point est le *centre* du système de forces parallèles.

Ce centre ne change pas si l'on multiplie les valeurs algébriques de toutes les forces par un même nombre.

253. Moment d'une force par rapport à un plan. — Dans cette théorie, toutes les forces que l'on considère sont parallèles à une même droite D ; on donne à chaque force une valeur algébrique en fixant un sens positif sur D (251).

Soit maintenant II un plan quelconque ; ce plan partage l'espace en deux régions : l'une sera appelée la région positive ; l'autre, la région négative. La distance d'un point au plan II est un nombre algébrique ayant pour valeur absolue la longueur de la perpendiculaire menée du point au plan ; ce nombre sera positif ou négatif selon que le point sera dans la région positive ou dans la région négative.

Cela posé :

Le moment d'une force par rapport à un plan est égal au produit de la valeur algébrique de la force par la valeur algébrique de la distance de son point d'application au plan.

On voit que le moment ne change pas si l'on change la direction de la force en conservant sa grandeur algébrique et son point d'application.

254. Remarque. — Considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$, de sens positif (*fig.* 92) ; prenons comme région positive, par rap-

port au plan Oxy, celle qui est du même côté que Oz ; soit alors F la valeur algébrique d'une force, x, y, z les coordonnées de son point d'application A ; le moment de la force F par rapport au plan Oxy est $F \times z$.

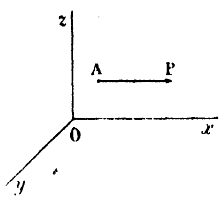


Fig. 92.

Supposons en particulier que la force soit parallèle à Ox ; sa valeur algébrique sera sa composante X, le moment sera donc Xz ; ici, les composantes Y et Z de la force sont nulles ; par conséquent, le moment de cette force par rapport à l'axe Oy sera (Vecteurs, 21)

$$M = Xz - xZ = Xz ;$$

dans ces conditions,

Le moment de la force par rapport au plan xOy est égal à son moment par rapport à l'axe Oy.

255. Théorème. — *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme des moments des composantes.*

Dans cet énoncé, on suppose la résultante appliquée au centre G du système de forces parallèles.

Pour le démontrer, prenons un trièdre trirectangle de sens positif $Oxyz$ et plaçons le plan Oxy sur le plan donné. Faisons tourner toutes les forces autour de leurs points d'application en conservant leurs valeurs algébriques, de manière à les rendre parallèles à la droite Ox ; la résultante tournera autour du point G, conservera sa grandeur, deviendra parallèle à Ox (252) ; cette opération n'a pas changé le moment des forces par rapport au plan.

Cela posé, dans cette nouvelle position, la force R est équivalente au système des forces parallèles ; donc le moment de R par rapport à l'axe Oy est égal à la somme des moments des forces parallèles par rapport au même axe. Mais, dans les conditions où nous sommes placés, les moments par rapport à l'axe Oy sont égaux aux moments par rapport au plan ; donc le moment de la résultante R par rapport au plan est égal à la somme des moments des forces du système par rapport à ce plan.

256. Détermination analytique du centre d'un système de forces parallèles. — Soient F_1, F_2, ..., F_n les valeurs algébriques des forces, R celle de leur résultante. On a déjà (251)

$$(1) \qquad R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n.$$

Désignons par A_1, A_2, ..., A_n les points d'application des forces F_1, F_2, ..., F_n, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A_1, par x_2, y_2, z_2 celles de A_2, etc..., par x_n, y_n, z_n celles de A_n. Soit enfin G le centre du système de forces parallèles, ξ, η, ζ les coordonnées de G. En appliquant le théorème des moments (255) aux plans yOz, zOx, xOy, on aura les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} R\xi = F_1x_1 + F_2x_2 + \cdots + F_nx_n, \\ R\eta = F_1y_1 + F_2y_2 + \cdots + F_ny_n, \\ R\zeta = F_1z_1 + F_2z_2 + \cdots + F_nz_n. \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) permettent d'obtenir les coordonnées ξ, η, ζ du centre G du système.

§ IX.

Centres de gravité.

257. Définition. — Aux différents points d'un corps matériel, appliquons des forces parallèles, de même sens, proportionnelles aux masses des points. Le centre de ce système de forces parallèles, dont la position ne dépend pas du facteur de proportionnalité par lequel on a multiplié la masse de chaque point pour obtenir la grandeur de la force appliquée en ce point, est le *centre de gravité du corps*.

Désignons par A_1, A_2, ..., A_n les points du corps, par m_1, m_2, ..., m_n leurs masses respectives, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A_1, par x_2, y_2, z_2 celles de A_2, etc..., par x_n, y_n, z_n celles de A_n ; soient G le centre de gravité du corps et ξ, η, ζ les coordonnées du point G. Si l'on suppose la force appliquée en chaque point égale à la masse de ce point, la résultante sera égale à la somme M des masses ; M est ce qu'on appelle la masse totale du corps. En appliquant les formules du n° 256, on aura

$$(1) \qquad M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n,$$

$$(2)\qquad \begin{cases} M\xi = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n, \\ M\eta = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n, \\ M\zeta = m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n. \end{cases}$$

Ce sont les équations qui déterminent le centre de gravité du corps.

258. Corps pesant. — Considérons un corps placé dans le voisinage de la terre. Chaque point de ce corps est soumis à l'action de la pesanteur ; la force qui agit sur chaque point est verticale, dirigée vers le bas, égale en grandeur au produit de la masse du point par l'intensité g de la pesanteur.

Dans les limites peu étendues où se trouvent les différents points d'un corps, on peut admettre que les verticales qui passent par ces différents points sont parallèles ; enfin. on peut admettre aussi que g a la même valeur en tous ces points. Les actions de la pesanteur forment un système de forces parallèles, de même sens, proportionnelles aux masses des points. Toutes ces forces ont une résultante appliquée au centre de gravité du corps, égale au produit de la masse totale par l'intensité de la pesanteur g. Cette résultante est le *poids du corps.*

259. Détermination expérimentale du centre de gravité. — Soit C (*fig.* 93) le corps considéré ; on le suspend à un fil OA par un de ses points A ; le corps prendra une position d'équilibre. Il est en équilibre sous l'action de deux forces : son poids P appliqué au centre de gravité G, et la tension du fil dirigée suivant AO. Ces deux forces doivent donc être opposées ; par conséquent, le prolongement de OA passe par G. Imaginons qu'on marque cette direction dans le corps, puis suspendons-le ensuite par un autre point, A_1 ; nous obtiendrons une autre droite, A_1B_1, passant par G. Ce point se trouve donc à l'intersection des droites AB, A_1B_1 marquées dans le corps.

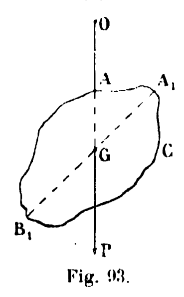


Fig. 93.

Au point de vue pratique, il est souvent impossible de marquer les droites AB, A_1B_1 dans le corps ; l'expérience précédente

ne donne alors que des renseignements approximatifs sur la position du centre de gravité

260. Remarque. — Partageons le corps donné C en plusieurs parties $C_1, C_2, \ldots, C_p$; d'après la remarque du n° 250, on peut, pour composer les forces appliquées en tous les points de C, composer d'abord en une seule les forces appliquées aux points de C_1, ce qui donne une résultante égale à la masse totale de C_1, appliquée à son centre de gravité G_1 : on composera de même les forces appliquées aux points de C_2, etc... Puis on composera en une seule toutes ces résultantes partielles. On voit que

Dans la recherche du centre de gravité d'un corps, on peut remplacer une portion quelconque de ce corps par un point matériel situé au centre de gravité de la portion considérée et ayant une masse égale à la masse totale de cette portion.

261. Exemples. — 1° *Centre de gravité de trois masses égales placées aux sommets d'un triangle* ABC (*fig.* 94).

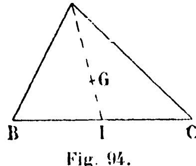


Fig. 94.

On peut d'abord remplacer les deux points B et C (260) par un point I de masse double placé au milieu de BC. Il faudra ensuite trouver le centre de gravité des points A et I. Ce centre G sera sur la médiane AI et l'on aura

$$2 \times IG = 1 \times AG,$$

c'est-à-dire que IG est le tiers de IA ; donc :

Les médianes d'un triangle se coupent en un point qui est situé au tiers de chacune d'elles à partir de la base.

Nous appellerons ce point le centre de gravité du triangle.

2° *Centre de gravité de quatre masses égales placées aux sommets d'un tétraèdre* ABCD (*fig.* 95).

On peut d'abord remplacer les trois points B, C, D par un point de masse triple situé au centre de gravité I du triangle BCD ; il ne restera plus qu'à trouver le centre de gravité des points A et I. On voit que le centre cherché G est situé sur AI, au quart de AI à partir du point I ; donc :

Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres de gravité des faces opposées se coupent en un point situé au quart de chacune d'elles à partir de la base.

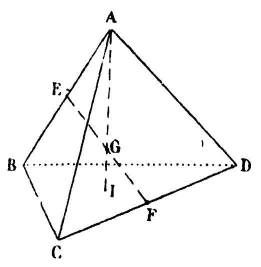


Fig. 95.

Nous appellerons ce point le *centre de gravité* du tétraèdre.

On aurait pu procéder autrement : remplacer les points A et B par un point de masse double situé au milieu E de AB, puis les points C et D par un point de masse double situé au milieu F de CD ; prendre ensuite le centre de gravité des deux points E et F ; le centre cherché est le milieu de EF ; donc :

Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent en leur milieu ; ce point de concours est le centre de gravité du tétraèdre.

262. Ligne matérielle. — Une ligne matérielle est un corps matériel dont deux dimensions sont négligeables, de sorte qu'on peut, sans erreur sensible, assimiler ce corps à une courbe géométrique. Soient alors A un point de cette courbe, M un autre point (*fig.* 96).

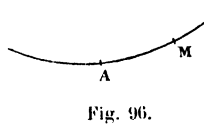


Fig. 96.

Considérons la portion AM du corps ; le rapport

$$\frac{\text{masse de AM}}{\text{arc AM}}$$

est la *masse spécifique moyenne* de l'arc AM ; la limite de ce rapport quand le point M se rapproche indéfiniment du point A est la *masse spécifique* de la courbe au point A.

Si la masse spécifique est la même en tous les points, on dit que la courbe est homogène.

Si μ est la masse spécifique d'une courbe homogène, l la longueur d'un arc AM de cette courbe, la masse de l'arc AM sera μl.

Dans ce qui va suivre nous ne considérerons que des courbes homogènes.

263. Remarque. — *Si un arc de courbe possède un centre, un axe ou un plan de symétrie, le centre de gravité de cet arc est placé au centre, sur l'axe ou sur le plan de symétrie.*

Ainsi, le centre de gravité d'une droite est placé en son milieu.

264. Centre de gravité d'une ligne polygonale homogène. — Soit une ligne polygonale homogène ABCDE (*fig.* 97).

Je puis remplacer la portion AB du corps par un point matériel a situé au milieu de AB et ayant une masse égale à la masse de AB (260); on remplacera de même la portion BC par un point matériel b placé au milieu de BC; etc.... On sera ramené à trouver le centre de gravité de points isolés a, b, c, d.

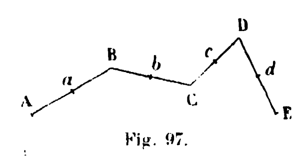


Fig. 97.

Les masses des points a, b, c, d étant égales respectivement à celles des portions AB, BC, CD, DE du corps sont entre elles comme les longueurs AB, BC, CD, DE; on peut, sans changer le résultat, les prendre égales à ces longueurs elles-mêmes, d'où la règle suivante :

Pour trouver le centre de gravité d'une ligne polygonale homogène, on remplace chaque côté de la ligne par un point matériel placé en son milieu et ayant une masse égale à la longueur du côté; on est ramené à trouver le centre de gravité de ces points matériels.

265. Remarque. — On trouverait le centre de gravité d'un arc de courbe en considérant cet arc comme la limite d'une ligne polygonale inscrite dont tous les côtés tendent vers zéro.

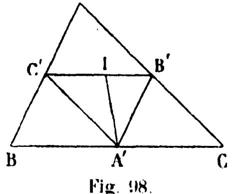


Fig. 98.

266. Centre de gravité du périmètre d'un triangle. — On ramène la recherche du centre de gravité du périmètre d'un triangle ABC (*fig.* 98) à celle du centre de gravité de trois points matériels A', B', C' (264) placés aux milieux

de BC, CA, AB et ayant des masses respectivement égales à ces côtés. Soit I le centre de gravité des points B′ et C′ ; le centre cherché sera sur A′I. Or, on a

$$\frac{IB'}{IC'} = \frac{\text{masse } C'}{\text{masse } B'} = \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'};$$

donc A′I est la bissectrice de l'angle B′A′C′. Le centre de gravité cherché se trouve aussi sur les bissectrices des angles B′ et C′ ; donc

Le centre de gravité du périmètre d'un triangle ABC *est le centre du cercle inscrit au triangle* A′B′C′ *qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* ABC.

267. Théorème. — *Le centre de gravité d'une ligne brisée régulière convexe est situé sur le rayon perpendiculaire à la corde qui joint les extrémités de cette ligne, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.*

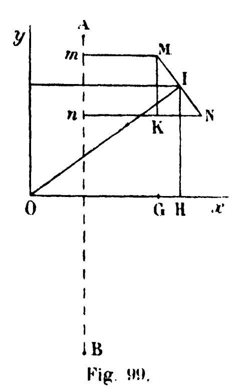


Fig. 99.

Soient A et B les extrémités de la ligne brisée régulière. Le rayon Ox perpendiculaire à la droite AB est évidemment un axe de symétrie de cette ligne ; le centre de gravité G se trouve sur cette droite (*fig.* 99). Soit maintenant MN un côté quelconque de la ligne ; nous remplaçons ce côté (264) par une masse égale à MN appliquée en son milieu I ; la masse totale sera égale à la longueur L de la ligne. Abaissons du point I la perpendiculaire IH sur Ox ; on aura, en appliquant les formules du n° 257,

$$(1) \qquad L \times OG = \Sigma MN \times OH,$$

la somme du second membre étant étendue à tous les côtés de la ligne.

Menons MK perpendiculaire à Ox, NK parallèle à Ox ; on forme ainsi un triangle MNK. Les deux triangles MKN et OHI sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; on

a donc

$$\frac{MN}{OI} = \frac{MK}{OH},$$

d'où $$MN \times OH = OI \times MK = OI \times mn,$$

en désignant par m et n les projections de M et de N sur AB. L'égalité (1) devient donc

$$L \times OG = \Sigma OI \times mn = OI \times \Sigma mn = OI \times AB,$$

en remarquant que OI a la même valeur pour tous les côtés de la ligne ; donc

$$\frac{L}{AB} = \frac{OI}{OG},$$

ce qui démontre le théorème.

268. Théorème. — *Le centre de gravité d'un arc de cercle est situé sur le rayon perpendiculaire à la corde qui joint les extrémités de l'arc, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

Ce théorème se déduit du précédent en considérant l'arc de cercle comme la limite d'une ligne brisée régulière dont le nombre des côtés croît indéfiniment.

269. Aire matérielle. — Une aire matérielle est un corps dont une dimension est négligeable, de telle sorte que l'on peut, sans erreur sensible, assimiler le corps à une surface géométrique (exemple : une plaque très mince). Soient S cette surface, A un point de cette surface (*fig.* 100) ; entourons le point A d'une courbe C tracée sur la surface et soit ε la portion d'aire située à l'intérieur de cette courbe ; le rapport

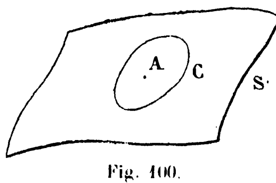


Fig. 100.

$$\frac{\text{masse de } \varepsilon}{\text{aire } \varepsilon}$$

est ce qu'on appelle la *masse spécifique moyenne* de l'aire ε ; si tous les points de la courbe C se rapprochent indéfiniment du point

A, la limite vers laquelle tend ce rapport (nous admettrons l'existence de cette limite) est la *masse spécifique* de l'aire au point A.

Si la masse spécifique est la même en tous les points, l'aire est dite *homogène*. Dans ce qui va suivre, nous ne considérerons que des aires homogènes.

Si μ est la masse spécifique d'une surface homogène, ε l'aire d'une portion de cette surface, la masse de cette portion est $\mu \times \varepsilon$.

270. Remarque I. — Pour trouver le centre de gravité d'une aire homogène, on peut décomposer cette aire en plusieurs portions et remplacer chacune de ces parties par un point matériel placé au centre de gravité de la portion considérée et ayant une masse égale à l'aire de cette portion (260).

271. Remarque II. — *Si une aire possède un centre, un axe ou un plan de symétrie, le centre de gravité de cette aire est placé au centre, sur l'axe ou sur le plan de symétrie.*

Ainsi, le centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme est le centre du parallélogramme.

272. Définition. — On dit qu'une figure plane possède un *diamètre* Δ lorsque les points de cette figure peuvent se grouper, deux par deux, de telle sorte que la droite qui les joint soit parallèle à une droite fixe δ et ait son milieu sur la droite Δ. Ainsi, deux points correspondants M et M′ sont tels que la droite MM′ soit parallèle à δ et que son milieu P se trouve sur Δ (*fig.* 101).

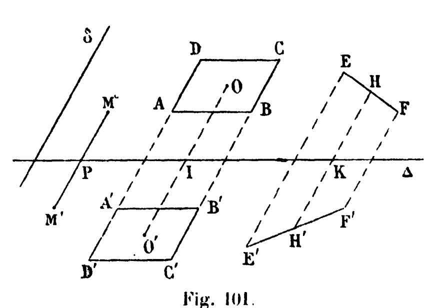


Fig. 101.

Dans le cas particulier où les directions δ et Δ sont rectangulaires, les points M et M′ sont symétriques par rapport à la droite Δ. Laissons de côté ce cas particulier.

Si le point M décrit un parallélogramme ABCD dont les côtés

sont parallèles aux droites Δ et δ, son correspondant M′ décrira un parallélogramme analogue A′B′C′D′. Les deux parallélogrammes ABCD et D′C′B′A′ sont superposables ; les aires correspondantes ABCD, A′B′C′D′ sont donc égales; de plus, la droite OO′ qui joint leurs centres de gravité a son milieu I sur la droite Δ.

273. Théorème. — *Si une aire plane possède un diamètre, son centre de gravité est situé sur ce diamètre.*

En effet, une telle aire peut être considérée comme la somme ou comme la limite de sommes de couples de parallélogrammes correspondants ABCD, A′B′C′D′ (*fig.* 101); le centre de gravité d'un couple de tels parallélogrammes se trouve sur la droite Δ ; donc il en est de même du centre de gravité de l'aire considérée.

274. Remarque. — *Le théorème ne s'applique pas à un arc de courbe qui possède un diamètre.*

Supposons en effet que le point M décrive un segment de droite EF, son correspondant M′ décrira un segment E′F′ (*fig.* 101); les milieux H et H′ de ces segments sont des points correspondants, c'est-à-dire que le milieu K de HH′ se trouve sur la droite Δ ; mais les segments EF, E′F′ n'ont pas la même longueur; le centre de gravité de l'ensemble EF, E′F′ est bien placé sur la droite HH′, mais il ne se trouve pas en son milieu K.

275. Théorème. — *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est le point de concours de ses médianes.*

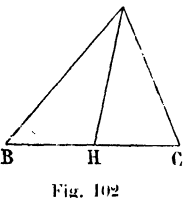


Fig. 102

En effet, considérons le triangle ABC ; menons une médiane AH (*fig.* 102) ; AH est un diamètre du triangle pour la direction BC ; donc le centre de gravité de l'aire du triangle est sur la médiane AH ; il doit, de même, se trouver sur les autres médianes; donc il est au point de concours des médianes.

276. Remarque. — Le centre de gravité de l'aire d'un triangle coïncide avec celui de trois masses égales placées aux sommets de ce triangle (261).

277. Centre de gravité de l'aire d'un trapèze. — Soient un trapèze ABCD (*fig.* 103), E et F les milieux des bases AB et CD; la droite EF est un diamètre du trapèze pour la direction des bases; donc le centre de gravité se trouve sur cette droite. Menons la diagonale BD; elle partage le trapèze en deux triangles ABD et DCB; le centre de gravité du triangle ABD est un point G_1 situé sur ED, au tiers de cette droite à partir du point E; de même, le centre de gravité du triangle DCB est un point G_2 situé sur FB, au tiers de cette droite à partir du point F; le centre de gravité G du trapèze se trouve à l'intersection des droites G_1G_2 et EF.

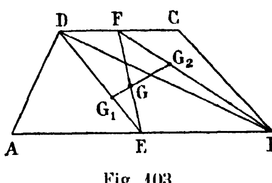


Fig. 103.

Nous allons évaluer le rapport de GE à GF ou, ce qui revient au même, le rapport des distances du point G aux bases AB et CD. Désignons par B et b les bases AB et CD du trapèze, par h sa hauteur, par x et y les distances du point G aux droites AB et CD.

Appliquons le théorème des moments à un plan mené par AB perpendiculairement au plan du trapèze; on aura, en remarquant que les distances de G_1, G_2, G à ce plan ont respectivement pour valeurs $\frac{1}{3}h$, $\frac{2}{3}h$, x,

$$\text{aire ABCD} \times x = \text{aire ABD} \times \frac{1}{3}h + \text{aire DCB} \times \frac{2}{3}h,$$

ou

$$\frac{1}{2}(\text{B} + b)hx = \frac{1}{2}\text{B}h \times \frac{1}{3}h + \frac{1}{2}bh \times \frac{2}{3}h.$$

En appliquant le même théorème au plan mené par CD perpendiculairement an plan du trapèze, on trouverait de même

$$\frac{1}{2}(\text{B} + b)hy = \frac{1}{2}\text{B}h \times \frac{2}{3}h + \frac{1}{2}bh \times \frac{1}{3}h.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$\frac{x}{y}=\frac{B+2b}{b+2B}$$

ou bien

$$\frac{GE}{GF}=\frac{B+2b}{b+2B},$$

d'où la construction suivante :

On prolonge DC au delà du point C d'une longueur CH égale à la base AB ; on prolonge BA au delà du point A d'une longueur AK égale à la base CD ; le centre de gravité est au point d'intersection I de EF et de HK (*fig.* 104).

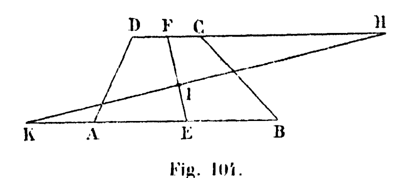


Fig. 104.

En effet, les triangles semblables IEK et IFH donnent

$$\frac{IE}{IF}=\frac{EK}{FH}=\frac{\frac{B}{2}+b}{\frac{b}{2}+B}=\frac{B+2b}{b+2B};$$

on a donc

$$\frac{IE}{IF}=\frac{GE}{GF};$$

par conséquent les points I et G coïncident.

278. Centre de gravité de l'aire d'un secteur polygonal régulier. — Considérons un secteur polygonal limité par une ligne brisée régulière ABCD et les rayons OA et OD qui passent à ses extrémités (*fig.* 105) ; prenons sur les rayons OA, OB, OC, OD des points A′, B′, C′, D′ tels que

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{2}{3}.$$

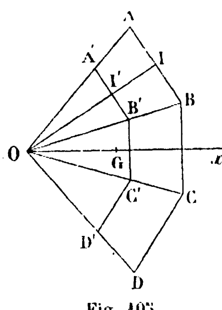


Fig. 105.

La figure A′B′C′D′, homothétique de ABCD, est une ligne brisée régulière. Cela posé, le secteur polygonal est la somme des triangles OAB, OBC, OCD. Le triangle OAB peut

être remplacé par un point matériel ayant une masse égale à l'aire OAB, appliquée au centre de gravité de ce triangle; ce centre de gravité est le milieu I' de A'B'. En effectuant la même opération pour les triangles OBC, OCD, on voit qu'on est ramené à trouver le centre de gravité de masses égales placées aux milieux des côtés A'B', B'C', C'D'. On serait conduit au même résultat en cherchant le centre de gravité de la ligne brisée régulière A'B'C'D'; donc le centre de gravité de l'aire OABCD coïncide avec celui de la ligne brisée régulière A'B'C'D'. Ce centre de gravité G est situé (267) sur le rayon Ox perpendiculaire à A'D' ou à AD, et l'on a

$$\frac{A'B'C'D'}{A'D'} = \frac{OI'}{OG}.$$

Mais A'B'C'D', A'D', OI' sont respectivement les $\frac{2}{3}$ de ABCD, AD, OI; donc:

Le centre de gravité de l'aire d'un secteur polygonal régulier est sur le rayon perpendiculaire à la corde qui passe par les extrémités de la ligne brisée régulière qui limite le secteur, à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle entre le périmètre, cette corde et l'apothème.

279. Théorème. — *Le centre de gravité d'un secteur circulaire est situé sur le rayon perpendiculaire à la corde qui sous-tend l'arc du secteur, à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

Ce théorème se déduit du précédent en considérant un secteur circulaire comme la limite d'un secteur polygonal régulier inscrit.

280. Théorème. — *Le centre de gravité de la projection orthogonale d'une aire polygonale plane coïncide avec la projection du centre de gravité de l'aire.*

Le théorème est vrai pour un triangle, puisqu'une médiane se projette suivant une médiane. Il s'agit de l'étendre à un polygone quelconque. Soient ABCDE un polygone plan, A'B'C'D'E' sa projection sur un plan P (*fig.* 106), G le centre de gravité du

polygone ABCDE, G′ celui du polygone A′B′C′D′E′; je vais démontrer que la droite GG′ est perpendiculaire au plan P. Pour cela, il suffit de démontrer que les distances d et d' des points G et G′ à un plan quelconque Q perpendiculaire au plan P sont égales.

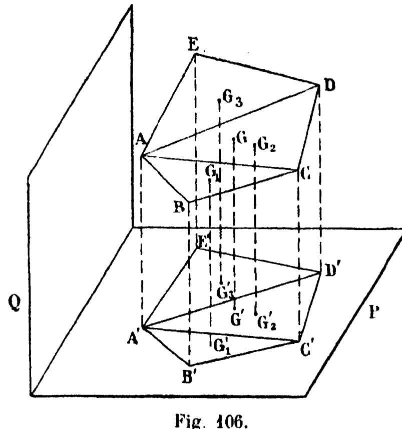


Fig. 106.

En effet, décomposons le polygone ABCDE en triangles ABC, ACD, ADE et le polygone A′B′C′D′E′ en triangles A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′; soient G_1, G_2, G_3, G_1', G_2', G_3' les centres de gravité respectifs des triangles ABC, ACD, ADE, A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′; les points G_1 et G_1' sont, d'après ce qui précède, sur une même perpendiculaire au plan P; leurs distances au plan Q sont égales. Soit d_1 la valeur commune de ces distances; désignons de même par d_2 la distance de chacun des points G_2, G_2' au plan Q, par d_3 celle des points G_3 et G_3'. En appliquant le théorème des moments par rapport au plan Q successivement aux aires ABCDE, A′B′C′D′E′, on aura

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{ABCDE} \times d = \text{ABC} \times d_1 + \text{ACD} \times d_2 + \text{ADE} \times d_3, \\ \text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}' \times d' = \text{A}'\text{B}'\text{C}' \times d_1 + \text{A}'\text{C}'\text{D}' \times d_2 + \text{A}'\text{D}'\text{E}' \times d_3; \end{array} \right.$$

mais on a (*Traité de Géométrie*, tome I, n° 581)

$$(2) \qquad \frac{\text{A}'\text{B}'\text{C}'}{\text{ABC}} = \frac{\text{A}'\text{C}'\text{D}'}{\text{ACD}} = \frac{\text{A}'\text{D}'\text{E}'}{\text{ADE}} = \frac{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'}{\text{ABCDE}} = \cos\alpha,$$

α étant l'angle que fait le plan ABCDE avec le plan de projection. Des équations (1) et (2) on déduit facilement $d' = d$, ce qui démontre le théorème.

281. Remarque. — Le théorème s'étend, par un passage à la limite, au cas d'une aire plane limitée par une courbe quelconque; donc:

Le centre de gravité de la projection orthogonale d'une aire plane est la projection du centre de gravité de cette aire.

282. Corollaire. — *Les centres de gravité de toutes les sections planes d'une surface prismatique ou cylindrique sont situés sur une même parallèle aux génératrices de la surface.*

En effet, ces centres de gravité sont situés (280 et 281) sur la droite menée par le centre de gravité d'une section droite de la surface perpendiculairement au plan de cette section droite.

283. Théorème. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire droit est égal au produit de l'aire de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*

Considérons le volume ABCA'B'C' limité par une surface prismatique et deux sections planes ABC, A'B'C' dont l'une A'B'C' est une section droite (*fig.* 107).

Le volume V de ce tronc de prisme est donné (*Traité de Géométrie,* tome I, n° 645) par la formule

$$(1) \qquad V = \frac{1}{3} A'B'C'(A'A + B'B + C'C).$$

Soient G et G' les centres de gravité des aires ABC, A'B'C'; la droite GG' est perpendiculaire au plan de la section droite A'B'C'. Le centre de gravité G de l'aire ABC est le centre de gravité de trois masses égales (269) appliquées aux sommets A, B, C du triangle ABC. En appliquant le théorème des moments par rapport au plan A'B'C', on aura

$$3GG' = AA' + BB' + CC'$$

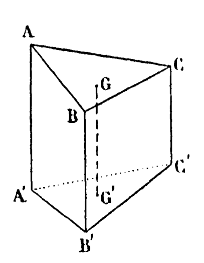


Fig. 107.

et, par conséquent, la formule (1) devient

$$V = A'B'C' \times GG',$$

ce qui démontre le théorème.

284. Théorème. — *Le volume d'un prisme tronqué droit quelconque* ABCDEA'B'C'D'E' (*fig.* 108) *est égal au produit de l'aire de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*

Considérons en effet le volume ABCDEA'B'C'D'E' limité par une surface prismatique, une section droite A'B'C'D'E' et une section plane quelconque ABCDE. Nous pouvons décomposer ce tronc de prisme en tronc de prismes triangulaires

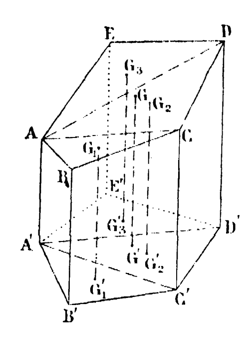


Fig. 108.

$$ABCA'B'C',\ ACDA'C'D',\ ADEA'D'E'.$$

En désignant par V le volume cherché, on aura

$$(1)\quad V = ABCA'B'C' + ACDA'C'D' + ADEA'D'E'.$$

Cela posé, désignons par G_1, G_2, G_3, G, G_1', G_2', G_3', G' les centres de gravité respectifs des aires ABC, ACD, ADE, ABCDE, A'B'C', A'C'D', A'D'E, A'B'C'D'E'; les droites G_1G_1', G_2G_2', G_3G_3', GG' sont parallèles aux arêtes du tronc de prisme et l'on a

$$(2)\quad \begin{cases} ABCA'B'C' = A'B'C' \times G_1G_1', \\ ACDA'C'D' = A'C'D' \times G_2G_2', \\ ADEA'D'E' = A'D'E' \times G_3G_3'. \end{cases}$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$(3)\quad V = A'B'C' \times G_1G_1' + A'C'D' \times G_2G_2' + A'D'E' \times G_3G_3'.$$

Or, si l'on applique le théorème des moments à l'aire ABCDE par rapport au plan de la section droite A'B'C'D'E', on aura

$$(4)\quad ABCDE \times GG' = ABC \times G_1G_1' + ACD \times G_2G_2' + ADE \times G_3G_3'.$$

Si l'on remarque maintenant que les aires ABCDE, ABC, ACD, ADE sont respectivement proportionnelles aux aires A'B'C'D'E', A'B'C', A'C'D', A'D'E', la formule (4) peut s'écrire

$$A'B'C'D'E' \times GG' = A'B'C' \times G_1G_1' + A'C'D' \times G_2G_2' + A'D'E' \times G_3G_3',$$

et, par conséquent, la formule (3) devient

$$V = A'B'C'D'E' \times GG',$$

ce qui démontre le théorème.

285. Théorème. — *Le volume d'un prisme tronqué quelconque est égal au produit de l'aire d'une section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*

Considérons en effet un volume limité par une surface prismatique $A'B'C'D'A''B''C''D''$ (*fig.* 109) et deux sections planes quelconques $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$.

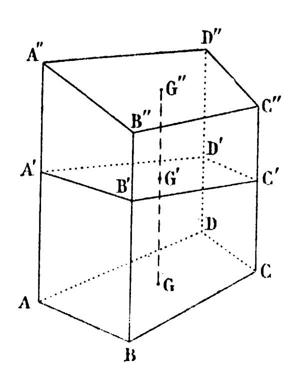


Fig. 109.

Coupons la surface prismatique par une section droite $ABCD$, qui laisse les deux sections planes d'un même côté de cette section. On aura

$$\text{Vol. } A'B'C'D'A''B''C''D'' = \text{Vol. } ABCDA''B''C''D'' - \text{Vol. } ABCDA'B'C'D'.$$

Désignons par G, G', G'' les centres de gravité des aires $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$. Les trois points G, G', G'' sont sur une même parallèle aux arêtes (282), et l'on a (284)

$$\text{Vol. } ABCDA''B''C''D'' = ABCD \times GG'',$$
$$\text{Vol. } ABCDA'B'C'D' = ABCD \times GG';$$

donc $$\text{Vol. } A'B'C'D'A''B''C''D'' = ABCD \times (GG'' - GG') = ABCD \times G'G'',$$

ce qui démontre le théorème.

286. Remarque. — Le théorème s'étend par un passage à la limite au volume d'un cylindre tronqué ; donc :

Le volume d'un cylindre tronqué est égal au produit de l'aire d'une section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.

287. Volume matériel. — Considérons un corps matériel quelconque ; soit A un point de ce corps ; décrivons une surface fermée S (par exemple une sphère de centre A) située dans le corps et renfermant le point A à son intérieur ; soient V le volume limité par cette surface, M la masse de ce volume ; le

rapport $\frac{M}{V}$ est la *masse spécifique moyenne* du volume V ; la limite de ce rapport quand tous les points de la surface S se rapprochent indéfiniment du point A est la *masse spécifique* du corps au point A. Si la densité est la même en tous les points, le corps est dit homogène. Nous ne nous occuperons que des volumes homogènes.

Si μ est la masse spécifique d'un corps homogène, V le volume d'une portion de ce corps, la masse de cette portion sera μV.

288. Remarque I. — Pour trouver le centre de gravité d'un volume homogène, on peut décomposer ce volume en plusieurs portions et remplacer chacune de ces parties par un point matériel placé au centre de gravité de la portion considérée et ayant une masse égale au volume de cette portion (260).

289. Remarque II. — *Si un volume possède un centre, un axe ou un plan de symétrie, le centre de gravité de ce volume est placé au centre, sur l'axe ou sur le plan de symétrie.*

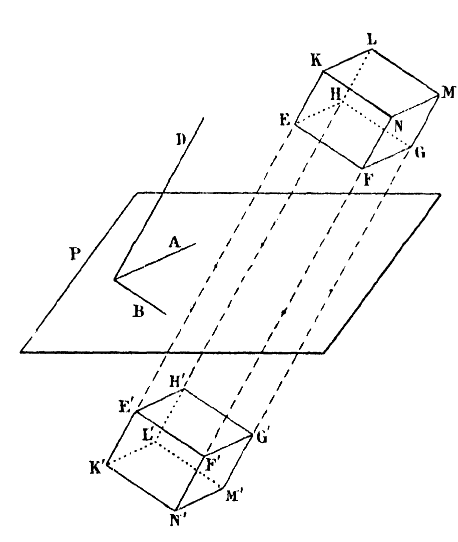


Fig. 110.

Ainsi, le centre de gravité du volume d'un parallélépipède est le centre de ce parallélépipède.

290. Définition. — On dit qu'une figure possède un *plan diamétral* P quand les points de cette figure se groupent deux par deux de telle sorte que la droite qui les joint soit parallèle à une droite fixe D et ait son milieu sur le plan P. Si la droite D est perpendiculaire au

plan P, le plan P est un plan de symétrie. Nous laisserons de côté ce cas particulier.

Nous appellerons encore ici points correspondants deux points M et M' tels que la droite MM' soit parallèle à la droite donnée D et ait son milieu sur le plan P.

Marquons dans le plan P deux droites quelconques A et B; construisons un parallélépipède EFGHKLMN (*fig.* 110) dont les arêtes sont parallèles aux droites A, B, D. Il leur correspond un parallélépipède analogue E'F'G'H'K'L'M'N'; les deux figures EFGHKLMN et K'N'M'L'E'H'G'F' sont superposables; les volumes de ces deux parallélépipèdes sont donc égaux; les centres de gravité de ces parallélépipèdes sont aussi des points correspondants.

291. Théorème. — *Si un volume possède un plan diamétral, son centre de gravité est situé sur ce plan.*

La démonstration se fait comme au n° 273 en remplaçant les parallélogrammes par les parallélépipèdes que nous venons de considérer.

292. Remarque. — Le théorème ne s'applique pas à un arc de courbe ou à une aire qui possède un plan diamétral.

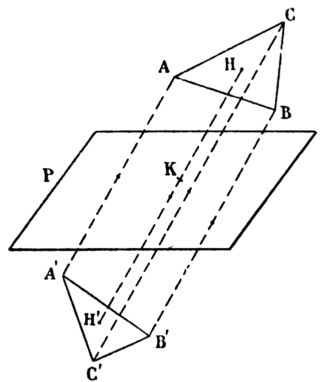


Fig. 111.

En ce qui concerne les lignes, on peut faire la même remarque qu'au n° 274. Considérons maintenant les aires; soient ABC, A'B'C' (*fig.* 111) deux triangles correspondants; les centres de gravité H et H' sont aussi des points correspondants; le milieu K de HH' est dans le plan P. Les aires correspondantes ABC, A'B'C' étant inégales, le centre de gravité de l'ensemble ABCA'B'C' est sur la droite HH', mais non en son milieu; ce centre de gravité est en dehors du plan P.

293. Théorème. — *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire coïncide avec le centre de gravité de la section équidistante des bases.*

Soit le prisme triangulaire $ABCA'B'C'$ (*fig.* 112); menons la section $A_1B_1C_1$ équidistante des bases. Ce plan est un plan diamétral pour les cordes parallèles aux arêtes du prisme; donc le centre de gravité est dans ce plan. Menons un plan par l'arête CC' et le milieu I de AB; ce plan coupe A_1B_1 et $A'B'$ en leurs milieux I_1 et I'; ce plan est un plan diamétral de la figure pour les cordes parallèles à AB; le centre de gravité est donc situé dans ce plan; il se trouve, par conséquent, sur la médiane C_1I_1 du triangle $A_1B_1C_1$. On voit de même qu'il doit se trouver sur les autres médianes du triangle $A_1B_1C_1$; donc le centre de gravité du prisme est le même que celui de l'aire $A_1B_1C_1$.

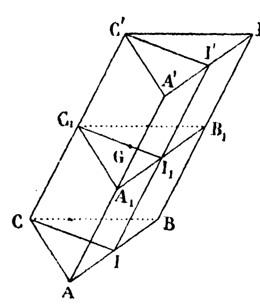


Fig. 112.

294. Théorème. — *Le centre de gravité d'un prisme quelconque coïncide avec le centre de gravité de la section équidistante des bases.*

Soit le prisme $ABCDEA'B'C'D'E'$ (*fig.* 113); décomposons-le en prismes triangulaires $ABCA'B'C'$, $ACDA'C'D'$, $ADEA'D'E'$; nous pourrons remplacer ces prismes par des points matériels G_1, G_2, G_3, placés à leurs centres de gravité et ayant respectivement des masses égales aux volumes de ces prismes.

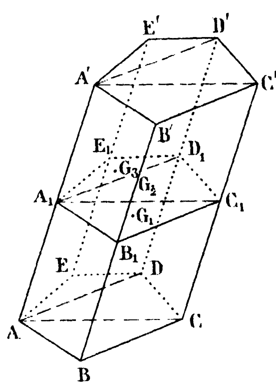


Fig. 113.

Menons la section équidistante des bases $A_1B_1C_1D_1E_1$; G_1, G_2, G_3 sont respectivement (293) les centres de gravité des triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1E_1$. Les masses de ces points sont entre elles comme les aires de ces triangles;

le centre de gravité de ces trois masses est donc celui de l'aire $A_1B_1C_1D_1E_1$; donc le centre de gravité du prisme coïncide avec celui de l'aire $A_1B_1C_1D_1E_1$.

295. Remarque I. — Les centres de gravité des aires planes ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$, $A'B'C'D'E'$ sont situés sur une parallèle (282) aux arêtes du prisme ; le centre de gravité de la section moyenne est le milieu des deux autres ; donc :

Le centre de gravité d'un prisme quelconque est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des bases.

296. Remarque II. — En considérant le volume d'un cylindre comme la limite vers laquelle tend le volume d'un prisme inscrit quand les côtés de la base du prisme tendent vers zéro, leur nombre croissant indéfiniment, on aura le résultat suivant :

Le centre de gravité d'un cylindre est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des bases.

297. Centre de gravité d'un tétraèdre. — Soit un tétraèdre ABCD (*fig.* **114**) ; menons le plan qui passe par l'arête AB et le milieu E de l'arête CD ; ce plan est un plan diamétral de la figure pour les cordes parallèles à CD ; donc le centre de gravité G se trouve dans ce plan. Il se trouve de même dans les plans analogues menés par les autres arêtes ; donc :

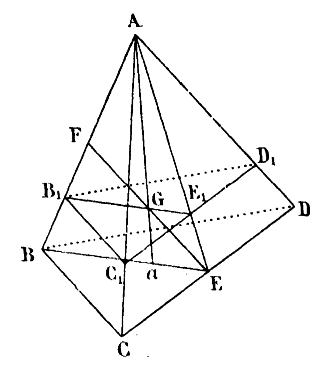


Fig. 114.

Le centre de gravité d'un tétraèdre est à l'intersection des six plans menés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.

Le centre de gravité G étant dans le plan ABE, la droite AG rencontre la médiane BE du triangle BCD ; on voit de même que cette droite rencontre les autres médianes de ce triangle ; par conséquent la droite AG rencontre le plan BCD en un point *a* qui est le centre de gra-

vité du triangle BCD ; en raisonnant de même sur les autres faces, on a le résultat suivant :

Le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve au point d'intersection des droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées.

Soit F le milieu de AB ; le centre de gravité, étant dans les deux plans ABE, CDF, se trouve sur leur droite d'intersection EF. Il se trouve de même sur les droites analogues ; donc :

Le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve au point d'intersection des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées.

298. Remarque I. — *Le centre de gravité du volume d'un tétraèdre coïncide avec celui de quatre masses égales placées aux sommets du tétraèdre* (261).

299. Remarque II. — Nous savons (261) que aG est le quart de aA ; si donc au quart de la hauteur issue de A à partir de la base BCD on mène une section $B_1C_1D_1$ parallèle à la base, le point G se trouvera dans cette section (*fig.* 114) ; je dis de plus que G est le centre de gravité du triangle $B_1C_1D_1$. En effet, soit E_1 le point où la droite AE coupe le plan $B_1C_1D_1$; E_1 sera le milieu de C_1D_1 ; le point G, étant dans les deux plans ABE et $B_1C_1D_1$, sera sur la médiane B_1E_1 du triangle $B_1C_1D_1$. On voit de même qu'il est sur les autres médianes ; par conséquent G est le centre de gravité du triangle $B_1C_1D_1$; donc :

Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre de gravité de la section faite par un plan parallèle à la base mené au quart de la hauteur à partir de la base.

Ce résultat est généralisé dans le théorème suivant :

300. Théorème. — *Le centre de gravité d'une pyramide coïncide avec le centre de gravité de la section faite dans la pyramide par un plan mené parallèlement à la base au quart de la hauteur à partir de la base.*

Soient la pyramide SABCDE (*fig.* 115) et la section $A_1B_1C_1D_1E_1$ menée au quart de la hauteur parallèlement à la base ; décomposons la pyramide en tétraèdres SABC, SACD, SADE ; on pourra remplacer ces pyramides par des points matériels placés

en leurs centres de gravité g_1, g_2, g_3 et ayant respectivement pour masses les volumes des tétraèdres correspondants. Or, les points g_1, g_2, g_3 sont les centres de gravité (299) des triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1E_1$; les masses des points sont proportionnelles aux aires de ces triangles ; le centre de gravité de ces masses est, par conséquent, le même que celui de l'aire $A_1B_1C_1D_1E_1$; donc le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec le centre de gravité de l'aire $A_1B_1C_1D_1E_1$.

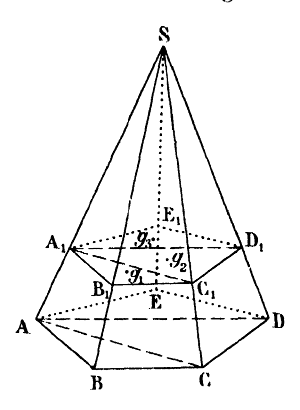


Fig. 115.

301. Remarque. — On voit facilement que la droite SG qui joint le sommet au centre de gravité de l'aire $A_1B_1C_1D_1E_1$ perce le plan ABCDE en un point s qui est le centre de gravité de l'aire ABCDE ; d'ailleurs sG est évidemment le quart de sS ; donc :

Le centre de gravité d'une pyramide est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et au quart de cette droite à partir de la base.

302. En considérant un cône comme la limite du volume d'une pyramide inscrite quand les côtés de la base tendent vers zéro, leur nombre croissant indéfiniment, on a les résultats suivants :

Le centre de gravité d'un cône coïncide avec celui d'une section faite par un plan mené parallèlement à la base au quart de la hauteur à partir de la base.

Le centre de gravité d'un cône est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette droite à partir de la base.

303. 1er Théorème de Guldin. — *L'aire engendrée par une ligne plane exécutant une révolution complète autour d'un axe*

situé dans son plan et ne la traversant pas est égale au produit de la longueur de cette ligne par la circonférence décrite par son centre de gravité.

Démontrons d'abord le théorème dans le cas d'une ligne brisée. Soit alors ABCDE (*fig.* 116) une ligne brisée plane tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan et ne la traversant pas; désignons par l_1, l_2, l_3, l_4 les longueurs des côtés AB, BC, CD, DE de cette ligne, par L la longueur totale de la ligne, par d_1, d_2, d_3, d_4 les distances des milieux H, K, M, N des côtés à l'axe de rotation Ox, par G le centre de gravité de la ligne, par d sa distance à l'axe Ox; en appliquant le théorème des moments à un plan mené par Ox perpendiculairement au plan de la figure, on aura

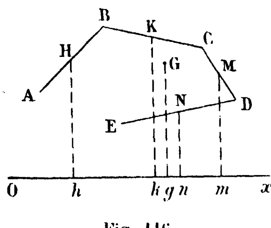


Fig. 116.

$$(1) \qquad \mathrm{L}d = l_1 d_1 + l_2 d_2 + l_3 d_3 + l_4 d_4.$$

D'autre part, la surface engendrée par AB est égale (*Traité de Géométrie*, livre VII) au produit de la longueur AB par la circonférence décrite par son milieu H. On a donc

$$\text{Surf. AB} = l_1 \times 2\pi d_1;$$

on a de même

$$\text{Surf. BC} = l_2 \times 2\pi d_2,$$
$$\text{Surf. CD} = l_3 \times 2\pi d_3,$$
$$\text{Surf. DE} = l_4 \times 2\pi d_4$$

et, en ajoutant,

$$\text{Surf. ABCDE} = 2\pi(l_1 d_1 + l_2 d_2 + l_3 d_3 + l_4 d_4).$$

En comparant avec la formule (1), on aura

$$\text{Surf. ABCDE} = 2\pi \mathrm{L}d = \mathrm{L} \times 2\pi d,$$

ce qui démontre le théorème.

Le théorème s'étend à une ligne courbe en considérant cette ligne comme la limite d'une ligne brisée inscrite quand les côtés de la ligne tendent vers zéro, leur nombre croissant indéfiniment.

304. 2e Théorème de Guldin. — *Le volume engendré par une aire plane exécutant une révolution complète autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égal au produit de cette aire par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.*

Nous distinguerons plusieurs cas :

1° *L'aire considérée est un rectangle dont deux côtés sont parallèles à l'axe de rotation.*

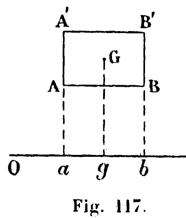


Fig. 117.

Soit le rectangle ABA'B' dont les côtés AB, A'B' sont parallèles à l'axe de rotation Ox (*fig.* 117) ; les côtés AA' et BB' sont perpendiculaires à cet axe et le rencontrent respectivement en a et b. Cela posé, le volume engendré par le rectangle ABA'B' est la différence des volumes des cylindres engendrés par les rectangles abA'B' et abAB. On a donc

$$\begin{aligned} \text{Vol. ABA'B'} &= \pi \text{AB} \times \overline{a\text{A}'}^2 - \pi \text{AB} \times \overline{a\text{A}}^2 \\ &= \pi \text{AB}(\overline{a\text{A}'}^2 - \overline{a\text{A}}^2) \\ &= \pi \text{AB} \times (a\text{A}' - a\text{A}) \times (a\text{A}' + a\text{A}); \end{aligned}$$

mais
$$a\text{A}' - a\text{A} = \text{AA}',$$

et si l'on désigne par G le centre de gravité du rectangle, par Gg sa distance à l'axe, on a

$$a\text{A}' + a\text{A} = 2\text{G}g ;$$

donc
$$\begin{aligned} \text{Vol. ABA'B'} &= \pi \text{AB} \times \text{AA}' \times 2\text{G}g, \\ &= (\text{AB} \times \text{AA}') \times 2\pi \text{G}g, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

2° *L'aire considérée est une somme de rectangles qui ont chacun deux côtés parallèles à l'axe de rotation.*

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les rectangles considérés, A_1, A_2, A_3, A_4 les aires de ces rectangles, A l'aire totale, G_1, G_2, G_3, G_4, G les centress de gravité respectif des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A, et d_1, d_2, d_3, d_4, d les distances respectives des points G_1, G_2, G_3, G_4, G à l'axe de rotation Ox (*fig.* 118).

En appliquant le théorème des moments au plan mené par Ox

perpendiculairement au plan de la figure, on a

$$(1) \qquad Ad = A_1d_1 + A_2d_2 + A_3d_3 + A_4d_4.$$

D'autre part, on a, d'après le cas précédent,

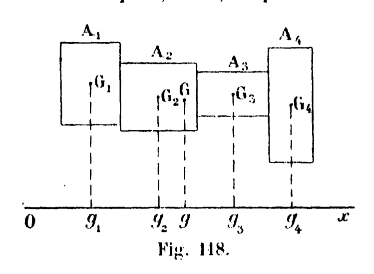


Fig. 118.

$$\text{Vol. } A_1 = A_1 \times 2\pi d_1,$$
$$\text{Vol. } A_2 = A_2 \times 2\pi d_2,$$
$$\text{Vol. } A_3 = A_3 \times 2\pi d_3,$$
$$\text{Vol. } A_4 = A_4 \times 2\pi d_4,$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$\text{Vol. } A = 2\pi(A_1d_1 + A_2d_2 + A_3d_3 + A_4d_4),$$

d'où, en tenant compte de la formule (1),

$$\text{Vol. } A = 2\pi Ad = A \times 2\pi d,$$

ce qui démontre le théorème.

3° *L'aire plane est quelconque.*

Toute aire plane pouvant être considérée comme la somme ou la limite de sommes de rectangles analogues à ceux que nous venons de considérer, le théorème est vrai pour cette aire.

305. Remarque. — Si l'on désigne par L la longueur d'une courbe plane, par d la distance de son centre de gravité à un axe situé dans son plan et qui ne la traverse pas, par S la surface engendrée par cette ligne en tournant autour de l'axe, on a

$$(1) \qquad S = 2\pi Ld\,;$$

de même, si A est la mesure d'une aire plane, d la distance de son centre de gravité à un axe situé dans son plan et qui ne la traverse pas, V le volume engendré par cette aire en tournant autour de l'axe, on a

$$(2) \qquad V = 2\pi Ad.$$

Ces formules permettent de calculer S ou V quand on connaît d et L ou A ; inversement, elles permettent de calculer d quand on connaît S ou V et L ou A. Nous allons en donner des exemples.

306. Surface et volume d'un tore. — On sait que le *tore* est la figure engendrée par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan. Plaçons-nous dans le cas où l'axe de rotation ne traverse pas le cercle ; désignons par R le rayon du cercle, par d la distance de son centre à l'axe. On aura

$$S = 2\pi \times 2\pi R \times d = 4\pi^2 R d,$$
$$V = 2\pi \times \pi R^2 \times d = 2\pi^2 R^2 d.$$

307. Centre de gravité d'un arc de cercle. — Soit AB un arc de cercle ; son centre de gravité G est sur le rayon Ox perpendiculaire à AB ; soit Oy (*fig.* 119) le diamètre perpendiculaire à Ox. D'après le théorème de Guldin, l'aire engendrée par l'arc AB en tournant autour de Oy est

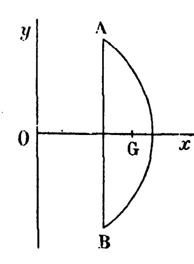


Fig. 119.

$$\text{arc AB} \times 2\pi OG.$$

D'autre part, en tournant autour de Oy, l'arc AB engendre une zone dont la hauteur est la corde AB ; en désignant par R le rayon de l'arc de cercle, l'aire de cette zone est (*Traité de Géométrie*, tome I, n° 865)

$$2\pi R \times AB.$$

On a donc, en égalant ces deux valeurs de l'aire engendrée,

$$\text{arc AB} \times OG = R \times AB$$

ou bien

$$\frac{\text{arc AB}}{AB} = \frac{R}{OG}.$$

On retrouve le résultat établi directement (268).

§ X.

Équilibre d'un corps solide gêné.

308. Un corps solide est complètement libre lorsque les points de ce corps ne sont assujettis qu'à la condition de conserver leurs distances respectives.

Si l'on impose d'autres conditions aux points du corps, on a un *solide gêné* ou encore un solide *soumis à des liaisons*. On peut, par exemple, assujettir un point du corps à rester fixe ou à décrire une courbe ou à rester sur une surface. Nous étudierons les cas suivants : 1° le solide a un point fixe ; 2° le solide a un axe fixe ; 3° le solide est assujetti à prendre un mouvement de translation rectiligne ; 4° le solide s'appuie par un ou plusieurs de ses points sur un plan fixe.

309. Théorème. — *Pour qu'un corps solide ayant un point fixe* O *soit en équilibre, il faut et il suffit que le moment résultant* OG *par rapport au point* O *des forces directement appliquées soit nul.*

La condition est suffisante, car si OG (*fig.* 120) est nul le système est équivalent à la résultante générale OR ; cette force OR est détruite par la fixité du point O ; donc il y a équilibre.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, je vais prouver que si OG n'est pas nul, l'équilibre n'existe pas. En effet, le système des forces directement appliquées est équivalent au système formé par la force OR et le couple OP, BQ dont l'axe est OG. Les forces OP, OR sont détruites par la fixité du point O ; il reste la force BQ. Il ne peut pas y avoir équilibre, car, si l'équilibre existait, il ne serait pas rompu en fixant l'axe OG du corps (Axiome II, 187) ; la force BQ perpendiculaire à l'axe de rotation OG ne peut pas maintenir le corps en équilibre (Axiome IV, 199).

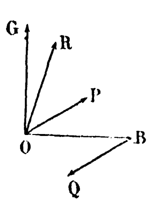


Fig. 120.

Menons par le point fixe O trois axes de coordonnées rectangulaires ; conservons les notations du n° 211 ; pour que OG soit nul, il faut et il suffit que

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Ce sont les trois équations d'équilibre du corps solide qui a un point fixe.

310. Remarque. — Pour que OG soit nul, il faut et il suffit que

le système des forces directement appliquées soit équivalent à une force unique passant par O ; donc :

Pour qu'un corps solide qui a un point fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que le système des forces directement appliquées admette une résultante passant par le point fixe.

311. Réaction du point fixe sur le corps. — Pression du corps sur le point. — Supposons qu'un corps solide ayant un point fixe O soit en équilibre ; les forces directement appliquées ont une résultante OR (*fig.* 121) ; marquons la force OR′ opposée à OR ; si aux forces directement appliquées on ajoutait la force OR′, le corps solide, considéré comme complètement libre, serait en équilibre.

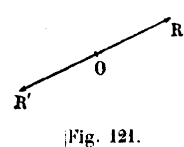


Fig. 121.

Fixer le point O du corps produit donc, au point de vue de l'équilibre, le même effet sur le corps que l'adjonction de la force OR′. Cette force OR′ est la *réaction* du point O sur le corps ; la force opposée OR est la *pression* du corps sur le point O.

312. Théorème. — *Pour qu'un corps solide ayant un axe fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces appliquées au solide par rapport à cet axe soit nulle.*

1° *La condition est suffisante.* En effet, soient OR la résultante générale, OG le moment résultant par rapport à un point O de l'axe (*fig.* 122). Puisque la somme des moments des forces par rapport à l'axe est nulle, OG est normal à l'axe ; il existera donc un couple OP, BQ ayant pour bras de levier l'axe D et pour axe OG ; le système des forces est donc équivalent aux trois forces OR, OP, BQ ; mais ces forces sont détruites par la fixité de l'axe ; donc il y a équilibre.

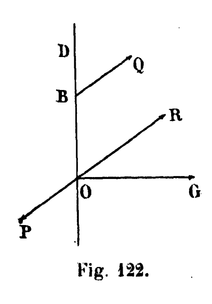


Fig. 122.

2° *La condition est nécessaire.* Je vais démontrer que si la somme des moments n'est pas nulle, l'équilibre n'existe pas.

Soient encore OR la résultante générale, OG le moment résultant par rapport à un point O de l'axe (*fig.* 123) ; puisque la somme des moments par rapport à l'axe n'est pas nulle, OG est oblique à l'axe ; on peut décomposer le couple d'axe OG en deux autres ayant pour axes OH et OK, OH étant porté sur D et OK perpendiculaire à D ; d'après ce qui précède, la force OR et le couple OK ne produisent aucun effet ; il reste à montrer que sous l'action du couple d'axe OH le corps ne peut pas être en équilibre. En effet, ce couple peut être formé de deux forces OP, BQ perpendiculaires à l'axe ; la première rencontrant l'axe est détruite ; il reste la force BQ qui, d'après l'axiome IV (199), mettra le corps en mouvement.

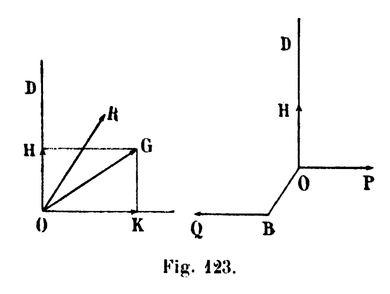


Fig. 123.

313. Remarque. — Pour fixer l'axe D, il suffit de fixer deux de ses points A et B (*fig.* 124) ; la fixité du point A introduit une réaction AP (311); la fixité du point B, une réaction BQ. Après l'adjonction de ces deux forces, le corps solide, considéré comme complètement libre, est en équilibre. Il en résulte que la somme des moments des forces directement appliquées et des forces P et Q par rapport à un axe quelconque doit être nulle. En particulier, si l'on prend les moments par rapport à l'axe D, les moments des forces P et Q sont nuls, ce qui montre que la somme des moments des forces directement appliquées par rapport à cet axe doit être nulle. On trouve ainsi par cette méthode la condition nécessaire d'équilibre.

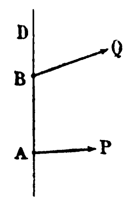


Fig. 124.

La même méthode permettrait aussi de déterminer (autant que la chose peut être faite) les réactions P et Q. Nous indiquons ce calcul à titre d'exercice (Exercice 60, p. 206).

314. Corps solide assujetti à prendre un mouvement recti-

ligne de translation. — Si un tel corps est en mouvement, tous les points de ce corps décrivent des droites parallèles à une droite fixe D'OD. Relativement à ce corps nous ferons les remarques suivantes :

1° *Le corps est en équilibre sous l'action d'une force* F *perpendiculaire à la droite* D.

En effet, supposons le corps en repos et soumettons-le à l'action de la force F ; s'il se met en mouvement, les points de ce corps se déplaceront tous soit suivant la direction OD, soit suivant la direction OD'.

A cause de la symétrie évidente qui existe dans la question, il n'y a pas plus de raison pour que le corps se déplace dans un sens que dans l'autre ; donc il reste au repos.

2° *Le corps est en équilibre sous l'action d'un couple quelconque.*

En effet, on peut sans changer l'axe d'un couple faire tourner ce couple dans son plan autour du milieu de son bras de levier. On pourra donc toujours amener les forces de ce couple à être perpendiculaires à la droite D ; dans ces conditions, elles ne produisent aucun effet sur le corps.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

315. Théorème. — *Pour qu'un corps solide assujetti à prendre un mouvement rectiligne de translation soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces directement appliquées sur la direction de la translation soit nulle.*

En effet, soient OR la résultante générale, OG le moment résultant par rapport à un point O ; menons par ce point O une droite D'OD parallèle à la direction de la translation ; la force OR peut être décomposée en deux autres, l'une OH dirigée suivant OD, l'autre OK perpendiculaire à OD (*fig.* 125) ; la force OK et le couple OG ne produisent aucun effet ; il reste donc simplement la force OH. Si OH est nul, le corps est en équilibre ; si OH n'est pas nul, le corps, supposé en repos, va se déplacer évidemment dans le sens de OH. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit

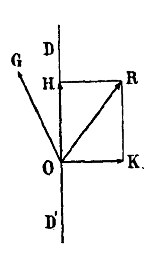


Fig. 125.

donc que OH soit nul; mais OH est égal à la somme des projections des forces appliquées au corps sur la direction OD, ce qui démontre le théorème.

316. Cas d'un corps solide reposant sur un plan parfaitement poli. — Supposons, pour fixer les idées, que le plan sur lequel repose le corps soit horizontal et que le corps soit placé du côté *haut* du plan. En chaque point de contact du corps et du plan, il y a une réaction du plan sur le corps (146 et 147); cette réaction est verticale et dirigée vers le haut. Le corps solide pourra donc être considéré comme un corps solide complètement libre pourvu qu'on ajoute ces réactions aux forces directement appliquées. Cela posé, nous considérerons successivement les cas où il y a un, deux, trois, un nombre quelconque de points d'appui.

1° *Cas d'un seul point d'appui* A (*fig.* 126).

La réaction $A\alpha$ doit faire équilibre aux forces directement appliquées; donc les forces appliquées doivent avoir une résultante R opposée à $A\alpha$, c'est-à-dire verticale, dirigée vers le bas et passant par A. Réciproquement, s'il en est ainsi l'équilibre existe, car en prenant la réaction $A\alpha$ égale à cette résultante R, le système sera en équilibre quand on ajoutera la force $A\alpha$ aux forces appliquées.

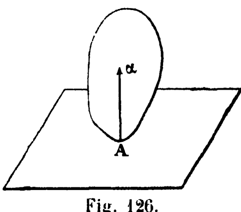


Fig. 126.

2° *Cas de deux points d'appui* A *et* B (*fig.* 127),

Les réactions $A\alpha$ et $B\beta$ ont une résultante $C\gamma$ appliquée en un point C de la droite AB; $C\gamma$ doit faire équilibre aux forces appliquées; donc ces forces doivent admettre une résultante R dirigée vers le bas, rencontrant la droite AB en un point C situé entre A et B.

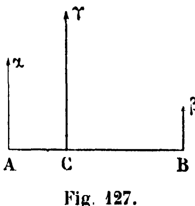


Fig. 127.

Dans ces conditions l'équilibre existe; prenons en effet $C\gamma$ opposé à R; la force $C\gamma$ peut être décomposée en deux autres $A\alpha$ et $B\beta$ (et cela d'une seule manière) appliquées en A et B; les forces directement appliquées et les réactions $A\alpha$, $B\beta$ forment un système de forces en équilibre.

3° *Cas de trois points d'appui* A, B, C *non situés en ligne droite* (*fig.* 128).

Les trois réactions $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ont une résultante $D\delta$, appliquée en un point D situé à l'intérieur du triangle ; en raisonnant de même que précédemment, on voit que pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces directement appliquées admettent une résultante verticale, dirigée vers le bas et rencontrant le plan en un point D situé à l'intérieur du triangle ABC. Réciproquement, dans ces conditions il y a équilibre. En effet, prenons $D\delta$ égal à R ; la droite AD coupe la droite BC en un point E ; on pourra décomposer $D\delta$ en deux forces verticales $A\alpha$, $E\varepsilon$ appliquées en A et E ; puis décomposer $E\varepsilon$ en deux forces verticales $B\beta$ et $C\gamma$ appliquées en B et C ; les forces directement appliquées et les réactions $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ forment un système en équilibre.

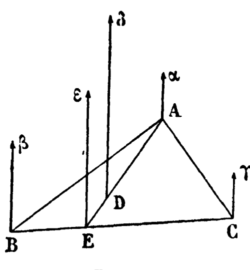


Fig. 128.

4° *Cas d'un nombre quelconque de points d'appui.*

Il existe toujours un polygone *convexe* et un seul dont tous les sommets sont des points d'appui et tel que les autres points d'appui se trouvent à l'intérieur de ce polygone. Ce polygone est appelé le *polygone de sustentation.*

Cela posé, les réactions appliquées aux points d'appui forment un système de forces parallèles et de même sens ; ces forces admettent une résultante dont le point d'application est à l'intérieur du polygone de sustentation. (On le voit en appliquant de proche en proche la règle de composition de deux forces parallèles et de même sens.)

En raisonnant comme dans les cas précédents, on voit que, pour que l'équilibre existe, il faut que les forces appliquées admettent une résultante R verticale, dirigée vers le bas et rencontrant le plan en un point H situé à l'intérieur du polygone de sustentation.

Cette condition est suffisante ; en effet, menons une force HP opposée à R ; on pourra (et d'une infinité de manières dès qu'il y a plus de trois points d'appui) décomposer HP en forces paral-

lèles $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, etc..., appliquées aux points d'appui A, B, C, ... Les forces appliquées et les réactions $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, etc... forment un système en équilibre.

§ XI.

Équilibre de systèmes de corps solides.

317. Indication de la marche à suivre. — Considérons plusieurs corps solides reliés entre eux par des liaisons quelconques, ce qui, au point de vue pratique, est le cas des machines que l'on rencontre dans l'industrie.

Pour établir les conditions d'équilibre d'un tel système, on considère isolément chacun des corps solides qui composent ce système. On applique à chacun d'eux les conditions d'équilibre d'un corps solide libre, en ajoutant aux forces directement appliquées à ce corps celles qui proviennent des liaisons imposées au corps. Ces forces de liaisons peuvent être de deux sortes :

1° Celles qui proviennent de relations imposées avec des corps fixes : ce qui arrive, par exemple, quand on fixe un point ou une droite du corps, ou encore quand on assujettit un point du corps à décrire une surface ; 2° celles qui proviennent des actions des corps les uns sur les autres ; relativement à celles-ci, il faut se rappeler que, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, à chaque action d'un corps A sur un corps B correspond une action opposée de B sur A.

Il résulte de là que le système formé : 1° des forces directement appliquées, 2° des forces qui proviennent de relations imposées avec des corps fixes est en équilibre.

Si l'on exprime ce résultat, on obtient une condition *nécessaire* d'équilibre du système de corps. Cette condition n'est pas en général suffisante.

318. Problème. — *Deux barres homogènes égales* IA, IA' (*fig.* 129) *sont articulées en* I, *les extrémités* A *et* A' *de ces barres sont assujetties à rester sur un cercle vertical* O ; *trouver la position d'équilibre.*

Considérons une position particulière des deux barres IA, IA′. On voit que le quadrilatère OAIA′ admet la droite OI comme axe de symétrie. Cette droite passe par le milieu du segment GG′ dont les extrémités sont les centres de gravité des deux barres IA, IA′. Ce point est le centre de gravité H du système formé par les deux barres.

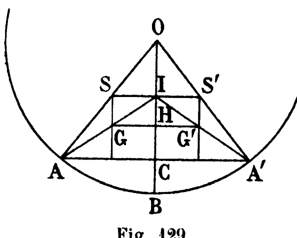


Fig. 129.

L'ensemble des deux barres est soumis aux forces suivantes:

1° Les poids des deux barres, qui sont équivalents à une force unique dont la ligne d'action passe par H ;

2° Les réactions exercées en A, A′ par le cercle fixe, qui sont dirigées suivant AO, A′O ;

3° Les réactions mutuelles exercées par les barres l'une sur l'autre en I, qui sont représentées par deux vecteurs d'origine I, de même grandeur géométrique, de directions opposées.

L'ensemble des trois forces (1) et (2) doit être en équilibre. Ces forces doivent être concourantes. La verticale de H doit donc passer par O. On sait que I est sur cette droite.

Cela posé, la barre IA est un corps solide soumis à l'action de trois forces : 1° son poids, appliqué au milieu G de IA ; 2° la réaction du cercle, dirigée suivant AO ; 3° l'action de la barre IA′ sur la barre IA : c'est une force passant par I. Les deux premières forces se coupent au milieu S de AO, la troisième force doit donc passer par le point S. On montre de même que l'action de la barre IA sur la barre IA′ doit passer par le milieu S′ de OA′ ; comme les actions des deux barres l'une sur l'autre sont égales et opposées, les trois points S, I, S′ doivent être en ligne droite.

Réciproquement, s'il en est ainsi, l'équilibre existe : en effet, on pourra décomposer le poids de la barre IA en deux forces dirigées suivant SA et SI : en changeant le sens de ces deux composantes on obtiendra respectivement la réaction du cercle et l'action de la barre IA′ ; les trois forces qui agissent sur la barre IA se font bien équilibre ; il en est de même pour la barre IA′.

Cela posé, désignons par r le rayon du cercle, par l la longueur de chaque barre, par φ l'angle AOI ; c'est l'angle qu'il faut déterminer pour avoir la position d'équilibre.

Or on a $$\mathrm{OI} = \mathrm{OS}\cos\varphi = \frac{r}{2}\cos\varphi$$

et $$\overline{\mathrm{IA}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OI}}^2 - 2\mathrm{OA}\times\mathrm{OI}\cos\varphi,$$

ce qui donne $$l^2 = r^2 - \frac{3}{4}r^2\cos^2\varphi,$$

d'où $$\cos^2\varphi = \frac{4}{3}\,\frac{r^2 - l^2}{r^2}$$

EXERCICES

1. Déterminer une force située dans le plan ABC connaissant ses moments par rapport aux points A, B, C.

2. Toute force située dans le plan ABC peut être décomposée en trois autres placées sur les côtés du triangle ABC. Démontrer que cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

3. Toute force peut être décomposée en six autres placées sur les six arêtes d'un tétraèdre. Cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière. — Relation qui existe, quelle que soit la force donnée, entre les six composantes.

4. Relation qui existe entre les moments d'une force quelconque par rapport aux six arêtes d'un tétraèdre.

5. On donne six forces placées sur les six arêtes d'un tétraèdre ; relations qui doivent exister entre ces six forces pour qu'elles forment un système équivalent à un couple.

6. On réduit un système de forces à deux, dont l'une passe par un point donné A ; démontrer que la seconde est située, quelle que soit la façon dont on fait la décomposition, dans un plan fixe P passant par A.

7. On réduit un système de forces à deux, dont l'une est assujettie à être dans un plan donné P ; montrer que, quelle que soit la façon dont on fait la décomposition, l'autre passe par un point fixe A du plan P.

8. Réduire un système de forces à deux, dont l'une passe par un

point donné A et a une grandeur donnée. — Montrer que le problème est possible d'une infinité de manières.

9. Étant donné un système de forces et un plan P, démontrer qu'en général il existe dans le plan P un point O et un seul tel que le moment résultant du système par rapport au point O soit normal au plan P. Lieu du point O quand le plan P se déplace en restant parallèle à un plan fixe.

10. Réduire un système de forces à deux, dont l'une soit située dans un plan fixe et l'autre normale à ce plan.

11. Réduire un système de forces à deux, dont l'une est placée sur une droite donnée D. — Discussion.

12. Si l'on réduit un système de forces à deux, la perpendiculaire commune à ces deux forces rencontre à angle droit l'axe central du système.

13. Si l'on réduit un système à deux forces, le volume du tétraèdre construit sur ces deux forces reste le même quelle que soit la manière de faire la décomposition.

14. D'une façon plus générale, si deux systèmes de forces sont équivalents, la somme algébrique des volumes des tétraèdres obtenus en prenant de toutes les manières possibles deux forces du premier système est égale à celle qu'on obtient en opérant de même sur le second système.

15. Trouver le cône décrit par les droites qui passent par un point fixe A et telles que le moment d'un système de forces par rapport à chacune de ces droites ait une valeur donnée.

16. Enveloppe des droites d'un plan P pour lesquelles le moment d'un système de forces a une valeur donnée.

17. Étant donné un polygone plan ABCDE..., au milieu de chaque côté on applique une force perpendiculaire à ce côté, située à la gauche de l'observateur qui parcourt le périmètre du polygone, égale au côté considéré. — Démontrer que ces forces forment un système en équilibre.

18. Les trois forces AB, BC, CA forment un système équivalent à un couple. Quel est l'axe du couple ?

19. Étant donné un polygone plan quelconque ABCDEF, les forces AB, BC, CD, DE, EF, FA forment un système équivalent à un couple. Quel est l'axe du couple ?

20. Si sur les côtés d'un polygone gauche on porte, dans un même sens de circulation, des forces égales aux côtés, on forme un système équivalent à un couple. La projection de l'axe du couple sur une droite D est le double de l'axe de la projection du polygone sur un plan Π perpendiculaire à D.

21. Étant donné un tétraèdre ABCD, les deux systèmes de forces AB, DC et AC, DB ont même résultante générale.

22. Étant donnés deux points A et B, on prend les points I et I′ qui partagent le segment AB dans le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, et l'on considère toutes les forces F telles que le rapport des grandeurs de leurs moments par rapport aux points A et B soit égal à $\frac{\alpha}{\beta}$.

Démontrer que les plans (I, F) et (I′, F) sont rectangulaires. En conclure :

1° que les forces F qui passent par un point S sont situées sur un cône ayant ses sections circulaires perpendiculaires aux droites SI, SI′ ;

2° que les forces F qui sont situées dans un plan Π sont tangentes à une conique (ellipse ou hyperbole) qui a pour foyers les projections des points I et I′ sur le plan Π.

Examiner ce qui arrive lorsque le point S est situé sur la sphère qui a II′ pour diamètre ou lorsque le plan Π est tangent à cette sphère.

23. Étant donné un trièdre $Sxyz$, on le coupe par un plan qui rencontre les arêtes Sx, Sy, Sz en A, B, C ; sur les arêtes du trièdre supplémentaire SXYZ, on porte des longueurs Sa, Sb, Sc proportionnelles aux aires BSC, CSA, ASB. Démontrer, en appliquant la théorie des couples, que la résultante des forces Sa, Sb, Sc est normale au plan ABC.

Étendre ce théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque.

24. Démontrer que, pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à chacune des arêtes d'un tétraèdre soit nulle.

25. Pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que le moment résultant du système par rapport à trois points A, B, C, non situés en ligne droite, soit nul.

26. Condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse placer sur quatre droites des forces formant un système en équilibre.

27. Étant donné un quadrilatère plan ABCD, placer sur les côtés de ce quadrilatère quatre forces formant un système en équilibre.

28. Aux centres de gravité des faces d'un tétraèdre on applique des forces, perpendiculaires à ces faces, dirigées vers l'intérieur du tétraèdre, proportionnelles aux aires de ces faces. Démontrer que ces quatre forces forment un système en équilibre.

Étendre ce théorème à un polyèdre convexe quelconque.

29. Aux sommets d'un tétraèdre on applique des forces dirigées suivant les hauteurs, vers l'intérieur du tétraèdre, proportionnelles aux faces opposées. Démontrer que ces quatre forces forment un système en équilibre.

30. On donne des forces F_1, F_2, ..., F_n situées dans un plan P, appliquées à des points A_1, A_2, ..., A_n de ce plan, admettant une résultante R. Démontrer que si l'on fait tourner toutes ces forces d'un même angle autour de leurs points d'application, leur résultante tourne autour d'un point fixe.

31. On considère des forces F_1, F_2, ..., F_n situées dans un plan P et appliquées à des points A_1, A_2, ..., A_n ; soit xOy un angle droit tracé dans le plan P ; on décompose chaque force F_i en deux autres R_i et S_i, parallèles respectivement à Ox et Oy et appliquées en A_i ; soient r le centre des forces parallèles R_i, s le centre des forces parallèles S_i. Démontrer que si l'on fait tourner l'angle droit xOy, les points r et s se déplacent sur une même droite ; on se place dans le cas où la résultante générale du système de forces n'est pas nulle.

32. Soient F_1, F_2, ..., F_n les forces parallèles appliquées aux points A_1, A_2, ..., A_n ; G le centre de ce système de forces parallèles, F leur résultante. En un point quelconque O on applique des forces OA'_1, OA'_2, ..., OA'_n dirigées respectivement suivant OA_1, OA_2, ..., OA_n et ayant pour valeurs algébriques $F_1 \times OA_1$, $F_2 \times OA_2$, ..., $F_n \times OA_n$. Démontrer que la résultante de ces forces est dirigée suivant OG et égale à $F \times OG$.

33. Soient A_1, A_2, ..., A_n les points d'application de forces parallèles ayant respectivement pour valeurs algébriques α_1, α_2, ..., α_n ; G le centre de ce système, α la valeur algébrique de la résultante de ces forces, M un point quelconque. Démontrer que l'on a

$$\sum_1^n \alpha_i \overline{MA_i}^2 = \alpha . \overline{MG}^2 + \sum_1^n \alpha_i \overline{GA_i}^2 .$$

34. Étant donnés cinq points quelconques, on mène la droite qui joint le milieu de deux de ces points au centre de gravité du triangle formé par les trois autres. Démontrer que toutes les droites ainsi menées ont un point commun.

35. On considère un système de forces parallèles dont la résultante générale est nulle. On le partage en deux parties, la première ayant une résultante générale α et la seconde $-\alpha$; soit G le centre de la première partie, G′ celui de la seconde. Démontrer que quelle que soit la manière de faire le partage en deux groupes, la droite GG′ conserve la même direction et le produit $\alpha \times GG'$ la même valeur.

36. Un point quelconque G peut toujours être considéré comme étant le centre d'un système de forces parallèles appliquées aux sommets A, B, C, D d'un tétraèdre.

37. Étant donné un triangle ABC et un point quelconque G, on mène les droites AG, BG, CG, qui coupent les côtés opposés BC, CA, AB en α, β, γ. Démontrer, par des considérations de mécanique, la relation

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \times \frac{\beta C}{\beta A} \times \frac{\gamma A}{\gamma B} = -1.$$

38. Étant donné un système de forces appliquées à un corps solide, on considère toutes les droites D telles que si l'on fixe l'axe D, le corps soit en équilibre. Démontrer :

1° que les droites D qui passent par un point A sont situées dans un plan ;

2° que les droites D qui appartiennent à un plan donné passent par un même point ;

3° que les droites D qui rencontrent une droite fixe L rencontrent toutes, en général, une seconde droite L′.

39. Réduire un système de forces à trois forces parallèles respectivement à des droites données.

40. Sur une droite Ox, aux points qui ont pour abscisses 1, 2, ..., n, on place des points matériels ayant une masse égale à l'abscisse. Trouver le centre de gravité de ce système de masses.

41. Trouver le centre de gravité d'un segment de droite OA, sachant que la densité en un point M est proportionnelle à OM.

42. Trouver le centre de gravité de l'aire d'un carré ABCD sachant que la densité au point M est proportionnelle à la distance de ce point au côté AB.

43. Trouver le centre de gravité d'un cube ABCDEFGH sachant que la densité en un point M de ce cube est proportionnelle à la distance de ce point à la face ABCD.

44. Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre deux circonférences dont l'une est intérieure à l'autre.

45. Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre un arc d'un quadrant et les tangentes à ses extrémités.

46. Trouver le centre de gravité de l'aire latérale d'une pyramide régulière; d'une portion de cette aire composée d'un nombre quelconque de faces latérales.

47. Trouver le centre de gravité de l'aire latérale d'un cône ; d'une portion de cette aire limitée par deux génératrices.

48. Centre de gravité de l'aire latérale d'un tronc de cône.

49. Étant donné un pentagone régulier ABCDE, trouver le centre de gravité de l'aire du quadrilatère ACDE.

50. Étant donné un octogone régulier ABCDEFGH, sur les côtés AB et CD on construit des triangles équilatéraux placés à l'intérieur de l'octogone ; trouver le centre de gravité de l'aire obtenue en enlevant de l'octogone ces deux triangles équilatéraux.

51. Étant donnés une courbe C, un point fixe A sur cette courbe, on prend le centre de gravité μ d'un arc AM. Quand le point M décrit la courbe C, le point μ décrit une courbe γ; démontrer que la tangente en μ à la courbe γ passe par le point M.

52. Étant donnée une ellipse, on considère toutes les cordes MN telles que l'aire comprise entre l'ellipse et la droite MN ait une valeur donnée. Trouver :

1° le lieu des milieux des cordes MN ;

2° le lieu des centres de gravité des aires découpées dans l'ellipse par la corde MN.

53. Soit S l'aire d'une portion de sphère de rayon R, σ la projection de cette aire sur un plan passant par le centre, d la distance de son centre de gravité à ce plan ; démontrer la formule

$$Sd = R\sigma.$$

54. Étant donné un cube ABCDEFGH, on mène le plan ADGH qui passe par deux arêtes parallèles opposées AD et GH ; trouver le centre de gravité ABCDGH.

55. Trouver le centre de gravité du volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles ; rapport des distances de ce centre de gravité aux deux bases.

56. Démontrer que le centre de gravité du volume d'un tronc de pyramide est le centre de gravité de trois masses placées aux centres de gravité des deux bases et de la section moyenne, et égales respec-

tivement aux aires des bases et au quadruple de l'aire de la section moyenne.

57. Centre de gravité de l'aire d'un segment de cercle.

58. Trouver le volume d'un tronc de cône circulaire droit en appliquant le théorème de Guldin.

59. On donne un cylindre de rayon R et de hauteur h ; sur une base du cylindre on construit un cône de hauteur h. Trouver le centre de gravité du volume limité par le cylindre et le cône.

60. Un corps solide est mobile autour de l'axe Oz ; les projections de la résultante générale sur les axes Ox, Oy, Oz sont X, Y, Z ; celles du moment résultant OG sont L, M et 0. On fixe le point O et un point A de l'axe. Calculer les réactions de ces points sur le corps solide. Expliquer *a priori* l'indétermination qui se produit dans ce calcul.

61. Centre de gravité de l'aire comprise entre une demi-ellipse et son petit axe. — En déduire le volume de l'ellipsoïde de révolution.

CHAPITRE X

MACHINES SIMPLES

319. Définitions. — Une machine simple forme ce que l'on appelle en mécanique un système à liaisons complètes ou encore un système ne possédant qu'un degré de liberté de mouvement. Dans un tel système, chaque point décrit une courbe fixe déterminée, et la position d'un point sur sa trajectoire suffit pour déterminer la position de tous les autres points. Un corps solide mobile autour d'un axe, une vis mobile dans un écrou fixe sont des systèmes à liaisons complètes.

On suppose de plus qu'une machine simple n'est soumise qu'à l'action de deux forces, la *puissance* et la *résistance*.

Nous étudierons successivement le *levier*, le *treuil* et les *poulies*, le *cric*, le *plan incliné*.

§ I.

Levier.

320. Équilibre du levier. — Un levier est un corps solide mobile autour d'un point fixe et soumis à l'action de deux forces : la *puissance* et la *résistance*.

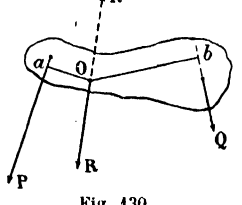


Fig. 130.

Soient O le point fixe, P la puissance, Q la résistance (*fig.* 130). Pour que le corps soit en équilibre, il faut et il suffit (310) que les forces P et Q aient une résultante R passant par O. Si donc on désigne par R' la force opposée à R, les trois forces P, Q, R' forment un système en

équilibre ; donc (213) ces trois forces sont situées dans un même plan ; il en résulte que les forces P et Q doivent être situées dans un même plan passant par le point d'appui O.

Supposons cette condition remplie. Pour que les forces admettent une résultante passant par O, il faut et il suffit que le moment résultant du système par rapport au point O soit nùl. Abaissons alors du point O les perpendiculaires Oa, Ob sur les forces P et Q ; ces droites Oa, Ob s'appellent les bras de levier de la puissance et de la résistance. Les moments des forces P et Q par rapport au point O étant égaux et de sens contraires, les angles OaP, ObQ doivent être de sens contraires, ce qu'on exprime encore en disant que les forces P et Q tendent à faire tourner leurs bras de levier Oa et Ob en sens contraires. Enfin, ces deux moments ayant même grandeur, on aura

$$P \times Oa = Q \times Ob,$$

c'est-à-dire que la puissance et la résistance sont en raison inverse de leurs bras de levier.

Il est clair que dans ces conditions il y a équilibre ; donc :

Pour qu'un levier soit en équilibre il faut et il suffit : 1° que la puissance et la résistance soient situées dans un même plan contenant le point d'appui ; 2° qu'elles tendent à faire tourner leurs bras de levier en sens contraires ; 3° qu'elles soient en raison inverse de leurs bras de levier.

321. Charge du point d'appui. — Supposons le levier en équilibre ; soit R la résultante des forces P et Q ; nous savons (310) que la pression du corps solide sur le point fixe est égale à R. Cette pression s'appelle ici la *charge du point d'appui.*

322. Différents genres de leviers. — On réduit ordinairement un levier à une barre rigide AB ; aux points A et B de cette barre, on applique la puissance P et la résistance Q ; si l'on suppose ces forces perpendiculaires à AB et si O est le point d'appui, on aura toujours

$$P \times OA = Q \times OB.$$

Cela posé, on peut distinguer les trois cas suivants :

1° Le point d'appui est placé entre les points d'application de la puissance et de la résistance (*fig.* 131); le levier est du ***premier genre***. — EXEMPLE : le levier qui sert à soulever les pierres.

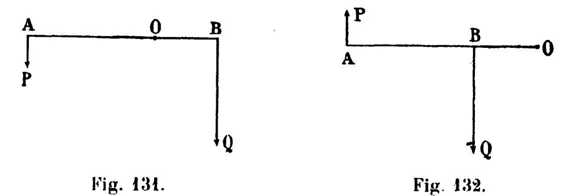


Fig. 131. Fig. 132.

2° Le point d'application de la résistance est placé entre le point d'appui et le point d'application de la puissance (*fig.* 132); le levier est du ***second genre***; la puissance est toujours plus petite que la résistance. — EXEMPLE : la brouette.

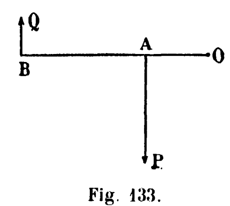


Fig. 133.

3° Le point d'application de la puissance est placé entre celui de la résistance et le point d'appui (*fig.* 133); le levier est du ***troisième genre***; la puissance est toujours plus grande que la résistance. — EXEMPLE : la pédale du rémouleur.

§ II.

Treuil.

323. Treuil. — Un ***treuil*** se compose d'un cylindre AB (*fig.* 134) terminé par deux cylindres plus petits, ayant le même axe et que l'on nomme les ***tourillons***; c'est par ses tourillons que l'appareil repose en M et N sur des appuis appelés ***coussinets***. Sur le cylindre AB s'enroule une corde qui est fixée à une extrémité et dont l'extrémité libre s'attache au fardeau à soulever Q. Q es la force résistante. Sur l'axe du treuil est montée une roue CD

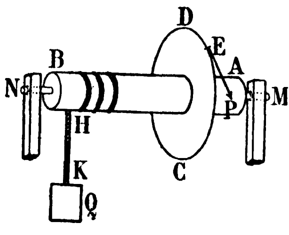


Fig. 134.

ayant même axe que le treuil ; la puissance P est appliquée tangentiellement à la roue CD, généralement par l'intermédiaire d'une corde. Outre ces deux forces, le treuil est soumis à un poids ϖ appliqué à son centre de gravité.

324. Équilibre du treuil. — Le treuil est un corps solide mobile autour d'un axe ; pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces appliquées à ce solide par rapport à l'axe soit nulle. La force Q n'est pas appliquée directement au corps solide ; elle est appliquée à la corde. D'autre part, la corde agit sur le corps solide. Si l'on néglige le frottement et la raideur des cordes, l'action de la corde sur le solide est égale à Q ; elle est appliquée suivant la direction HK de cette corde, au point où la corde touche le cylindre. En somme, le treuil est soumis à trois forces ; son poids ϖ appliqué au centre de gravité, la puissance P appliquée en E tangentiellement à la roue CD, une force égale à Q appliquée au point F où la corde touche le cylindre AB (*fig.* 135). Le moment de ϖ

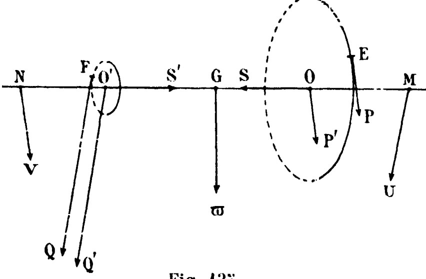


Fig. 135.

par rapport à l'axe MN est nul ; les moments de P et de Q doivent être de sens contraires ; ils doivent ensuite avoir même valeur absolue. Si donc on désigne par r le rayon du cylindre, par R celui de la roue, on aura

$$P \times R = Q \times r,$$

ou bien

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R};$$

donc *le rapport entre la puissance et la résistance est égal au rapport des rayons du cylindre et de la roue.*

325. Charge des points d'appui. — Le moment OS de la force P par rapport au centre de la roue est dirigé suivant l'axe MN ; la force P est donc équivalente à une force OP′ équipollente à OP et à un couple d'axe OS ; de même, si O′ est le centre de la section droite du cylindre qui passe par le point d'application F de la force Q, on pourra remplacer cette force Q par une force équipollente O′Q′ et un couple d'axe O′S′ ; les deux couples OS, O′S′ se détruisent (c'est la condition d'équilibre). S'il y a équilibre, le système de forces est donc équivalent au système des trois forces P′, Q′, ϖ appliquées aux points O, G, O′ de l'axe ; chacune de ces forces pourra être décomposée en deux forces parallèles appliquées en M et N. En composant ensuite les trois forces appliquées en M, puis les trois forces appliquées en N, on réduit le système aux forces MU et NV appliquées en M et N ; ces forces MU et NV sont les pressions du corps sur les points M et N ou les *charges des points d'appui* M et N.

On peut remarquer que MU et NV sont perpendiculaires à l'axe MN.

326. Différents types de treuils. — **1° Treuil des puits.** — La roue est remplacée par une manivelle *bc*, adaptée à l'extrémité d'un bras *ab* monté sur l'axe à l'extrémité de l'un des

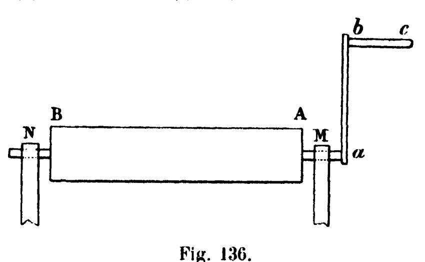


Fig. 136.

tourillons (*fig.* 136) ; la puissance s'exerce par la main d'un homme qui saisit la manivelle.

2° **Treuils des carriers.** — La roue ici est très grande, évidée à l'intérieur ; sur son pourtour elle porte des chevilles. Un ou plusieurs hommes agissent sur cette roue en montant sur les chevilles et en se plaçant un peu au-dessous de l'axe.

Ici la puissance est le poids de l'homme, P ; cette puissance n'est plus tangente à la roue. Soit I la position de l'homme sur

Fig. 137.

la roue, α l'angle que fait le rayon OI avec l'horizon ; le moment de la force P par rapport à l'axe est $PR\cos\alpha$; celui de la résistance est toujours Qr ; l'équation d'équilibre est donc

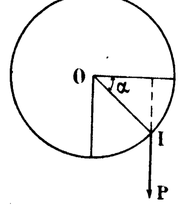


Fig. 138.

$$PR\cos\alpha = Qr.$$

3° **Cabestan.** — Le cabestan est un treuil dont l'axe est vertical ; on l'emploie pour le transport horizontal des fardeaux. Les tourillons s'engagent dans une charpente fixe qui supporte le treuil ; le tourillon supérieur porte une tête T traversée par de longues barres horizontales telles que *ab* (*fig.* 139) ; la puissance est exercée

par un ou plusieurs hommes qui agissent à l'extrémité de ces barres.

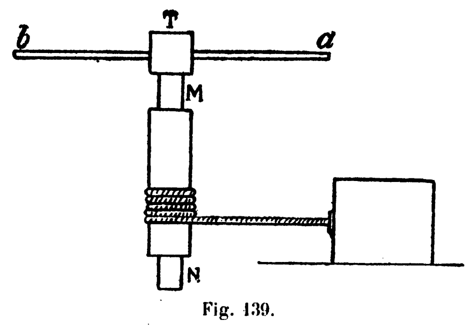


Fig. 139.

§ III.

Poulies. — Moufles. — Palans.

327. **Poulie.** — Une *poulie* est une petite roue en bois ou en métal dont la circonférence est creusée suivant un profil qui forme la *gorge*. La gorge est représentée en EE′ dans une coupe de la poulie faite suivant un diamètre (*fig.* 141). L'axe de la poulie repose par ses extrémités sur les branches d'une chape en fer ABCD (*fig.* 141); cette chape porte à sa partie supérieure un crochet H, comme l'indique la figure 140 qui représente une projection de la poulie sur le plan de la roue. Une corde s'enroule sur la gorge de la poulie.

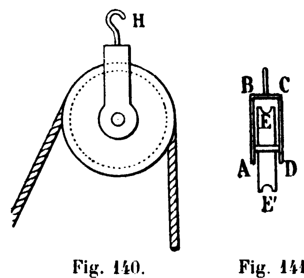


Fig. 140. Fig. 141.

328. **Poulie fixe.** — On obtient la poulie fixe en accrochant le crochet de la chape à un point fixe. La corde qui s'enroule sur la poulie est sollicitée à l'une de ses extrémités par la puissance, à l'autre par la résistance. En négligeant le frottement et la raideur des cordes, on peut appliquer ces forces P et Q aux

points A et B où la corde quitte la poulie (*fig.* 142). Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que les moments des forces P et Q par rapport à l'axe de la poulie soient égaux et de signes contraires. Si donc r désigne le rayon de la poulie, on aura

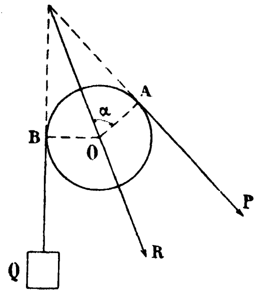


Fig. 142.

$$Pr = Qr,$$

d'où $$P = Q;$$

par conséquent :

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la puissance soit égale à la résistance.

Limitons la poulie à un disque circulaire de centre O ; la résultante des forces P et Q passera par O, et si R est cette résultante, on aura

$$R = 2P \sin \alpha,$$

2α désignant l'angle des rayons OA et OB ; cette résultante R est la pression sur le point O ou la *charge du point d'appui.*

329. Poulie mobile. — Dans la poulie mobile, l'une des extrémités de la corde est attachée à un point fixe B ; à l'autre extrémité est appliquée la puissance P ; le fardeau à soulever, c'est-à-dire la résistance Q, est appliqué au crochet de la chape (*fig.* 143). La poulie est soumise à trois forces : la puissance P appliquée au point A tangentiellement à la poulie, la résistance Q qu'on peut transporter au centre O de la poulie, enfin la tension T du cordon BB' appliquée en B' tangentiellement à la poulie. La force Q rencontre l'axe O de la poulie ; en prenant les moments par rapport à cet axe, on aura, en désignant encore par r le rayon de la poulie,

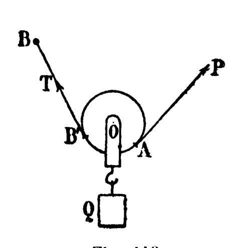


Fig. 143.

$$Pr = Tr,$$

c'est-à-dire P = T. La force Q doit être opposée à la résultante

des forces égales P et T, ce qui exige que les directions des forces P et T soient également inclinées sur la verticale. Désignons par α l'angle que font ces directions avec la verticale ; en écrivant que la projection de Q sur la verticale est égale en valeur absolue à la somme des projections de P et de T, on aura

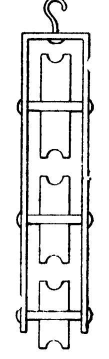


Fig. 145.

$$Q = 2P \cos \alpha.$$

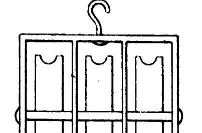


Fig. 144.

Si les deux brins de la corde sont parallèles, on a $Q = 2P$; la résistance est le double de la puissance.

330. Moufle. — Une *moufle* est un assemblage de plusieurs poulies dans une même chape. En général, ces poulies sont égales et tournent autour d'un même axe, comme l'indique la coupe représentée dans la figure 144. D'autres fois, au contraire, les poulies sont inégales et leurs axes sont parallèles (*fig.* 145).

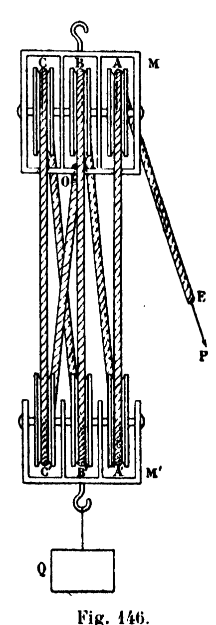


Fig. 146.

331. Palan. — Un palan se compose de deux moufles M et M' ; supposons pour fixer les idées que la moufle M contienne trois poulies A, B, C et la moufle M' trois poulies A', B', C' (*fig.* 146).

Le crochet de la moufle M est fixé à un point immobile, le crochet de la moufle M' porte le fardeau Q qu'il s'agit de soulever ; c'est la résistance. Une corde dont l'extrémité E est libre vient s'enrouler sur la poulie A, puis successivement sur les poulies A', B, B', C, C' ; le brin de corde qui part ensuite de C' vient s'attacher à un point O de la moufle M. A l'extrémité libre E de la corde on applique la puissance P.

Si l'on considère l'équilibre de chaque poulie qui forme le système M, on voit que les tensions de tous les cordons qui y aboutissent doivent être égales à la force P ; ces tensions sont les mêmes que celles qui représentent l'action des cordes sur les poulies du système M'. On peut donc dire qu'à chaque cordon correspond une force dirigée suivant le cordon, vers le haut, égale à P. On peut, sans erreur sensible, considérer ces forces comme verticales. La moufle M' est donc soumise d'une part à six forces verticales égales à P et dirigées vers le haut, d'autre part à la force Q qui est verticale et dirigée vers le bas. Pour qu'il y ait équilibre, il faut donc que

$$Q = 6P.$$

D'une manière générale, si les moufles contiennent chacune n poulies, on aura

$$Q = 2nP.$$

La résistance est donc $2n$ *fois plus grande que la puissance.*

§ IV.

Cric.

332. Cric. — Un *cric* est un appareil qui sert à soulever de lourds fardeaux. Il se compose d'une crémaillère AB (*fig.* 147) qui engrène avec un pignon C. Sur l'axe de ce pignon C est montée une manivelle HL (*fig.* 148). Tout le rouage et la partie inférieure de la crémaillère sont logés à l'intérieur d'une boîte en bois ; la manivelle est placée à l'extérieur de cette boîte. L'axe de la manivelle porte une roue à rochets R (*fig.* 149) sur laquelle vient s'appliquer un *cliquet* IK mobile autour de I. Ce cliquet permet à la roue R et par suite à la manivelle de tourner dans le sens de la flèche, mais l'empêche de tourner en sens contraire. Cet encliquetage a pour but d'empêcher la crémaillère de descendre, à moins que l'on ne soulève le cliquet IK.

Q
B
C
A

Fig. 147.

L'extrémité supérieure de la crémaillère porte un crochet qui permet de saisir le fardeau Q qu'il s'agit de soulever ; c'est la résistance. La puissance P est appliquée à l'extrémité L de la manivelle, tangentiellement au cercle décrit par L.

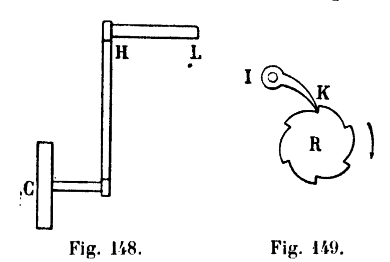


Fig. 148. Fig. 149.

333. Équilibre du cric. — Par rapport au bâti fixe la crémaillère peut prendre un mouvement de translation, tandis que le pignon C et la manivelle HL peuvent tourner autour d'un axe fixe. Nous supposerons les dimensions des dents d'engrenage suffisamment petites pour que l'on puisse assimiler le pignon C à un cercle assujetti à rester au contact avec la crémaillère, la face de contact étant assimilée à une droite Δ tangente au cercle en I.

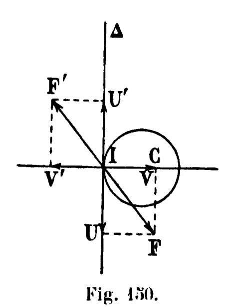


Fig. 150.

En dehors de la puissance et de la résistance il y a lieu de faire intervenir les actions réciproques du pignon et de la crémaillère l'un sur l'autre. Ces forces sont représentées par deux vecteurs IF, IF′ (*fig.* 150), d'origine I, de même grandeur, de directions opposées, et peuvent séparément être décomposées en deux forces IU, IV ; IU′, IV′, dont les lignes d'action sont : Δ pour IU, IU′ ; CI normal à Δ en I pour IV, IV′. L'influence de la pesanteur sur la crémaillère et l'ensemble du pignon et de la manivelle fait intervenir des forces, petites relativement aux forces données, et qui seront négligées dans le raisonnement.

Nous étudierons séparément l'équilibre de la crémaillère et du système pignon manivelle.

Soit IF′ l'action exercée par le pignon sur la crémaillère. Comme la crémaillère est assujettie à prendre un mouvement de translation parallèle à la direction Δ, on sait (315) que la condi-

tion nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre s'écrit

$$Q + IU' = 0,$$

ou

$$Q = IU.$$

L'ensemble pignon manivelle est assujetti à tourner autour de l'axe du pignon C, qui est fixe. Si ρ désigne le rayon du pignon, r le rayon de la manivelle, IF représentant l'action de la crémaillère sur le pignon, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre (312) est que la somme des moments de IF et de P par rapport à l'axe soit nulle. On a donc

$$IU \times \rho = Pr,$$

ou

$$Q \times \rho = Pr,$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\rho}{r}.$$

§ V.

Plan incliné.

334. Plan incliné. — Soit un plan P qui n'est ni horizontal ni vertical ; coupons-le par un plan horizontal H. Considérons la

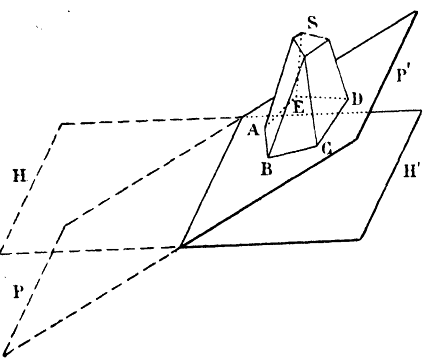


Fig. 151.

portion P′ du plan P qui est au-dessus de H ; considérons de même le demi-plan H′ du plan H qui forme un angle aigu α avec le demi-plan P′ (*fig.* 151).

Le *côté bas* du plan P est celui qui est du même côté que la portion H′ ; le *côté haut* est de l'autre côté.

Considérons un corps solide soumis à des forces quelconques et assujetti à reposer sur le côté haut du plan P ; nous nous proposons de chercher les conditions d'équilibre de ce corps solide en supposant le plan P *parfaitement poli*. Nous savons que, dans ce cas, le corps peut être considéré comme complètement libre, pourvu qu'on ajoute aux forces directement appliquées les réactions du plan sur le corps. Ces réactions sont appliquées aux points de contact du corps et du plan ; elles sont normales au plan et dirigées du côté haut. Ces réactions ont donc une résultante R, normale au plan, dirigée vers le haut et appliquée en un point situé à l'intérieur du polygone de *sustentation* ABCDE (*fig.* 151). Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit qu'après l'adjonction aux forces directement appliquées d'une force R satisfaisant aux conditions précédentes, le corps solide, considéré comme un corps complètement libre, soit en équilibre.

Parmi les forces directement appliquées, il y a lieu de tenir compte du poids (si l'on ne tenait pas compte du poids, il n'y aurait pas de raison de dire que le plan est incliné) ; c'est une force verticale et dirigée vers le bas.

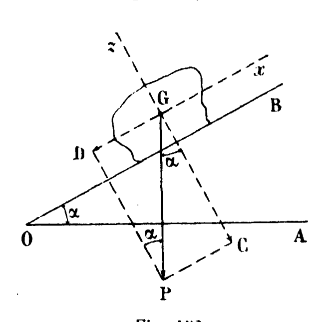


Fig. 152.

Prenons comme plan de la figure (*fig.* 152) le plan vertical mené par le centre de gravité perpendiculairement au plan P ; il coupe les demi-plans H′ et P′ suivant les droites OA et OB faisant entre elles un angle α ; OB est la ligne de plus grande pente du plan P. On peut décomposer la force P en deux autres GC et GD ; la force GC est normale au plan P et dirigée vers le bas ; la force GD est parallèle à la ligne de plus grande pente et dirigée vers le bas. On a en outre

$$GC = P \cos \alpha, \qquad GD = P \sin \alpha.$$

335. Équilibre d'un corps solide posé sur un plan incliné. — Nous prendrons trois axes rectangulaires Gx, Gy, Gz menés par le centre de gravité G ; l'axe Gx est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan ; l'axe Gz est normal au plan et dirigé vers le haut, enfin l'axe Gy est perpendiculaire au plan Gxz (*fig.* 153). Les projections du poids sur ces axes sont (334)

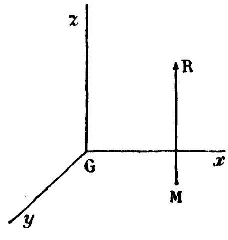


Fig. 153.

$$-P \sin \alpha, \quad 0, \quad -P \cos \alpha.$$

Les moments du poids par rapport aux axes sont nuls.

D'autre part, la résultante R des réactions est parallèle à Gz, dirigée vers le haut ; on peut transporter son point d'application au point M où elle rencontre le plan Gxy ; ce point M devra se trouver à l'intérieur de la projection du polygone de sustentation sur le plan Gxy.

Les projections de la force R sur les axes sont

$$0, \quad 0, \quad R.$$

Ses moments par rapport aux axes seront, en désignant par ξ et η les coordonnées du point M,

$$\eta R, \quad -\xi R, \quad 0.$$

Considérons maintenant le système des forces directement appliquées, autres que le poids ; soient X, Y, Z la somme des projections de ces forces sur les axes Gx, Gy, Gz et L, M, N les moments de ces forces par rapport aux mêmes axes. En écrivant que le corps solide, supposé libre, est en équilibre sous l'action de ces forces, du poids et de la force R, on aura

$$(1)\left\{\begin{aligned} X - P\sin\alpha &= 0,\\ Y &= 0,\\ Z - P\cos\alpha + R &= 0,\end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned} L + \eta R &= 0,\\ M - \xi R &= 0,\\ N &= 0.\end{aligned}\right.$$

On a donc d'abord trois équations nécessaires pour que l'équilibre existe :

$$(3)\left\{\begin{aligned} X - P\sin\alpha &= 0,\\ Y &= 0,\\ N &= 0.\end{aligned}\right.$$

De la troisième des équations (1) on déduira ensuite

$$(4) \qquad R = P\cos\alpha - Z,$$

puis des deux premières des équations (2),

$$(5) \qquad \xi = \frac{M}{R}, \qquad \eta = -\frac{L}{R}.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

1° *Les trois équations* (3) *sont satisfaites ;*

2° *La valeur de* R *fournie par l'équation* (4) *est positive ;*

3° *Le point* M *dont les coordonnées* ξ *et* η *sont données par les formules* (5) *se trouve à l'intérieur de la projection du polygone de sustentation sur le plan* Gxy.

336. Cas où il n'y a qu'une seule force, autre que le poids, appliquée au corps solide. — Appliquons au corps solide une seule force F, ayant pour composantes X, Y, Z et appliquée en un point M ayant pour coordonnées x, y, z. On a ici

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

Les équations (3) du numéro précédent donnent d'abord

$$X = P\sin\alpha, \qquad Y = 0.$$

L'équation $N = 0$ devient alors

$$-yP\sin\alpha = 0,$$

d'où

$$y = 0.$$

Y et y étant nuls, la force F est située dans le plan des xz ; elle n'est pas parallèle à l'axe des z puisque X n'est pas nul ; on peut supposer cette force transportée au point où elle rencontre l'axe des z ; soit ζ le z de ce point ; on aura

$$L = 0, \qquad M = \zeta P\sin\alpha.$$

Les formules (2) du numéro précédent donnent

$$\eta = 0, \qquad \xi = \frac{\zeta P\sin\alpha}{R}.$$

Les conditions d'équilibre sont alors les suivantes :

1° *L'expression*

$$R = P\cos\alpha - Z$$

est positive.

2° *Le point de l'axe des x dont l'abscisse est*

$$\xi = \frac{\zeta P \sin \alpha}{R}$$

se projette à l'intérieur du polygone de sustentation.

§ VI.

Machines.

337. Une machine n'a pas seulement pour but de maintenir en équilibre la puissance et la résistance. Les points d'application de ces forces se déplacent. Le point d'application de la puissance se déplace dans le sens de cette force, ou du moins la direction de ce déplacement fait un angle petit avec la direction de la puissance ; il en résulte que le travail de la puissance est positif : c'est le *travail moteur* T_m.

Au contraire, le point d'application de la résistance se déplace en sens inverse de cette résistance ou, du moins, la direction de ce déplacement fait un angle voisin de 180° avec la direction de la résistance ; le travail de cette résistance est donc négatif ; nous le désignerons par $-T_r$; T_r est le *travail résistant.*

Une machine a donc pour but de transformer un travail (le travail moteur) en un autre, le travail de la résistance.

338. Théorème. — *Si une machine simple est mise en mouvement, les conditions d'équilibre étant remplies à chaque instant, le travail de la puissance est égal et de signe contraire à celui de la résistance.*

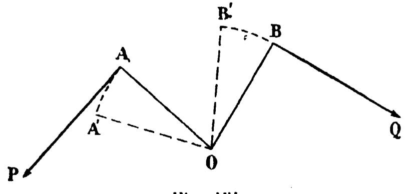


Fig. 154.

Nous allons vérifier ce théorème successivement sur le levier, les poulies, le treuil et le cric.

Levier. — Soient O le point fixe autour duquel se meut le levier, P la puissance, Q la résistance que nous pouvons supposer appliquées à l'extrémité de leurs brasde levier A et B (154).

Supposons que tout le système se déplace dans le plan OAB ; le point A décrit un arc de cercle AA′ dans le sens de la puissance ; le point B décrit un arc BB′ en sens inverse de la résistance Q ; le travail de P est positif, celui de Q négatif. On a

$$\text{Tr.P} = \text{P} \times \text{arc AA}',$$
$$-\text{Tr.Q} = \text{Q} \times \text{arc BB}'.$$

Les angles AOA′, BOB′ sont égaux et de même sens ; par conséquent les arcs AA′, BB′ sont entre eux comme OA et OB, donc

$$\frac{\text{Tr.P}}{-\text{Tr.Q}} = \frac{\text{P} \times \text{OA}}{\text{Q} \times \text{OB}}.$$

Mais si le levier est en équilibre (320), on a

$$\text{P} \times \text{OA} = \text{Q} \times \text{OB} ;$$

donc les travaux des forces P et Q sont égaux et de sens contraires.

Poulie fixe. — Dans la poulie fixe, on a, s'il y a équilibre (328), P = Q ; les points d'application des forces P et Q se déplacent de quantités égales ; le point d'application de P dans le sens de cette force, le point d'application de Q en sens inverse On a donc bien

$$\text{Tr.P} = -\text{Tr.Q}.$$

Treuil. — Supposons que le treuil tourne autour de son axe d'un angle φ ; le point d'application E de la puissance décrit dans le sens de cette force un arc $R\varphi$ (324) ; le travail de la puissance est donc

$$PR\varphi.$$

Le point d'application F de la résistance Q décrit, en sens inverse de Q, un arc $r\varphi$; le travail de Q est donc

$$-Qr\varphi.$$

S'il y a équilibre (324),

$$PR = Qr ;$$

donc

$$\text{Tr.P} = -\text{Tr.Q}.$$

Cric. — Supposons que l'arbre de la manivelle et le pignon C (332) tournent d'un angle φ; le point d'application de la puissance décrit dans le sens de cette force un arc $r\varphi$; le travail de la puissance est donc

$$\mathcal{T}P = Pr\varphi.$$

D'autre part le déplacement rectiligne de la crémaillère est mesuré par $\rho\varphi$, et le travail de la résistance a pour expression

$$\mathcal{T}Q = -Q\rho\varphi.$$

Mais on a (333)

$$Q\rho = Pr;$$

donc

$$\mathcal{T}P + \mathcal{T}Q = 0.$$

EXERCICES

1. Deux barres homogènes OA, OB, de même densité, rectangulaires, ayant pour longueurs a et b, sont mobiles dans un plan vertical autour du point O supposé fixe. Trouver la position d'équilibre.

2. Une barre homogène pesante AB se déplace dans un plan vertical. L'extrémité A doit glisser sans frottement sur une droite OR; l'extrémité B, sur une droite OS; trouver les positions d'équilibre.

3. Trouver les conditions d'équilibre d'un levier en tenant compte de son poids.

4. Équilibre d'une barre AB dont une extrémité A s'appuie sur un plan vertical, l'extrémité B sur un plan horizontal, en tenant compte du frottement. On supposera que le coefficient de frottement est le même sur les deux plans.

5. Deux plans inclinés sont adossés l'un à l'autre; leurs lignes de plus grande pente CA et CB font respectivement des angles α et β avec l'horizon. Un point M de masse m est placé sur CA; un point M′ de masse m' est placé sur CB. Ces deux points sont liés par un fil inextensible qui passe sur une poulie infiniment petite placée en C. Conditions d'équilibre.

6. Condition d'équilibre d'un corps solide placé sur un plan incliné et soumis, outre son poids, à l'action d'une seule force.

7. Un cône de rayon R et de hauteur h repose par sa base sur un plan incliné. Au sommet S on applique une force F parallèle à la ligne de plus grande pente et dirigée vers le haut. Condition d'équilibre.

8. Dans le treuil des puits on considère le moment où la puissance est verticale et dirigée vers le haut. Calculer à cet instant les pressions sur les points d'appui. — Peut-il arriver que la pression sur le coussinet le plus rapproché de la manivelle soit dirigée vers le haut? Quel est l'inconvénient qui en résulterait ?

SUJETS DE CONCOURS D'ADMISSION A SAINT-CYR

1920. — *Le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de 60° sur l'horizon, et vers le haut, on lance un mobile avec une vitesse de 2 mètres à la seconde.*

A quelle distance de son point de départ le mobile se trouve-t-il au bout de 10 secondes ? Quelle vitesse a-t-il à cet instant ?

Il n'y a pas de frottement ; $g = 980$ C. G. S.

1921. — *a) Au sommet* A *d'une plaque carrée de poids négligeable est suspendu un poids de grandeur x; aux sommets* B, C, D *sont suspendus des poids égaux de grandeur 1. Calculer les distances du centre de gravité du système aux côtés du carré. On prendra*

$$AB = 1.$$

b) Sous l'action de ces poids la plaque reste en équilibre quand elle repose sur deux pointes qui la rencontrent, l'une au milieu E *de* AB, *l'autre en un autre point,* F, *du périmètre. Déterminer la position de ce point* F ; *indiquer comment il se déplace quand x varie et dire, suivant les valeurs de x, sur quel côté il se trouve.*

c) Calculer la réaction de l'appui E ; *comment varie-t-elle avec x ? Tracer la courbe représentative de cette variation.*

1922. — *On applique aux sommets d'un triangle* ABC *trois forces* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *respectivement équipollentes à* BC, CA, AB.

1° Démontrer que ces trois forces forment un système équivalent à un couple. Trouver l'axe de ce couple.

2° On fait tourner ces forces autour de leurs points d'application d'un même angle ω et dans le même sens, ce qui les amène en $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$. Démontrer que ce système $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ est équivalent à un couple. Trouver l'axe de ce couple. Pour quelle valeur de ω les trois forces se font-elles équilibre ?

1923. — *Une pyramide SABCD a pour base un carré de côté a ; les arêtes latérales sont égales à a ; on coupe par un plan A' B' C' D' passant par les milieux des arêtes latérales. Trouver le centre de gravité :*

1° du volume du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D' ;

2° de sa surface latérale ;

3° de sa surface totale,

en supposant toujours que les corps sont homogènes.

1924. — *On considère un cube ABCD abcd de centre O et de côté l, Aa, Bb, Cc, Dd sont parallèles et de même sens ; AB et DC sont parallèles et de même sens ; le cube est orienté de telle manière que le moment du vecteur AB par rapport au point a soit dirigé suivant ad, de a vers d.*

On désigne par S le système des deux forces représentées par les vecteurs AB, Cc. Trouver un système équivalent à S et constitué par une force OF appliquée en O et un couple dont on représentera l'axe (ou moment) par un vecteur OG. Calculer les longueurs des vecteurs OF et OG et construire les points où les droites portant ces vecteurs percent la surface du cube.

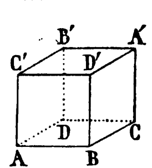
1925. — *1° De deux points A_0, A, situés sur une même horizontale, on lance, au même moment, deux points pesants m_0, m, avec des vitesses v_0, v. m_0 est lancé verticalement vers le haut ; m est lancé dans le plan vertical AA_0, dans une direction faisant l'angle α avec l'horizon.*

Démontrer que, pour que les deux mobiles se rencontrent, il faut et il suffit qu'ils soient à chaque instant sur une même horizontale. v_0 étant donnée, quelle est la valeur minimum de v qui permet la rencontre avant que m_0 soit revenu en A ? Quel est l'angle α correspondant ?

2° De deux points A, A_0, situés sur une même verticale, partent au même instant deux mobiles m_0, m, avec des vitesses v_0, v. m_0 se meut uniformément sur une horizontale H ; m est pesant et est lancé dans le plan vertical contenant H dans une direction faisant un angle α avec l'horizon. Démontrer que, pour que les deux mobiles se rencontrent, il faut et il suffit qu'ils soient à chaque instant sur une même verticale ; v_0 étant donnée, quelle est la valeur minimum de v qui permet la rencontre ? Quel est l'angle α correspondant ?

Distance $AA_0 = l$; accélération de la pesanteur $= g$.

1926. — *Soit un cube* ABCDA'B'C'D', *où* AB, BC, CD, DA *désignent les arêtes consécutives d'une même face, les sommets* (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D') *formant les couples de sommets opposés. Montrer que le plan* ACD' *est perpendiculaire à la diagonale* BB' *en son tiers à partir de* B. *Déterminer le centre de gravité du tétraèdre, solide et homogène,* BACD', *puis le centre de gravité de la portion complémentaire du cube, supposée elle aussi solide et homogène.*



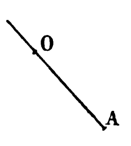
1927. (*1re composition*). — *On considère un tétraèdre régulier* ABCD *et les forces représentées par les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, *et* $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$. *Résultante générale et moment résultant, par rapport au point* D, *de ce système de six forces.*

1927. (*Composition refaite*). — *Un parallélépipède oblique à bases parallèles a pour base un carré* ABCD *de côté* AB = 1 *mètre ; il repose sur le plan horizontal par cette base et est supposé rempli d'une substance pesante et homogène.*

Les arêtes latérales sont parallèles au plan vertical passant par AC *et font un angle de 45° avec le plan horizontal : quelle longueur maximum doit avoir l'arête* AA' *pour que le parallélépipède ne bascule pas ?*

1928. — *Dans le plan vertical* xOy (Ox *horizontal,* Oy *vertical dirigé vers le haut), on suppose réalisée matériellement la parabole dont l'équation est* $y = x^2$. *Sur cette courbe glisse, avec frottement, un point* P *matériel pesant; le coefficient de frottement est* $f = 0{,}2$. *Dans quelle région de la courbe peut-on abandonner le point* P, *sans vitesse initiale, pour qu'il reste en équilibre ?*

1929. — *Une bille matérielle, de rayon suffisamment petit pour être assimilée à un point, glisse sans frottement sur un plan* P *incliné à 45° sur l'horizon : le croquis figure la coupe du plan* P *par un plan vertical contenant la ligne de plus grande pente* OA *et l'on suppose que le bord inférieur du plan est constitué par l'horizontale issue de* A. *A l'instant initial la bille est abandonnée en* O *sans vitesse initiale : quelle doit être la distance* OA *pour qu'au bout d'une seconde la bille arrive en* A ? *A partir de* A, *la bille tombe dans l'espace libre : quelle trajectoire décrit-elle, en supposant négligeable la résistance de l'air ? Définir cette trajectoire par ses éléments géométriques usuels ; calculer la vitesse de la bille deux secondes après le départ du point* O.



Accélération de la pesanteur : $g = 981$, *en prenant le centimètre pour unité de longueur, la seconde pour unité de temps.*

1930. — *On tire d'un point* A *sur un point* B *tel que* AB $= 2\,000^{m}$; A *et* B *sont supposés à la même cote et la résistance de l'air sur le projectile est supposée négligeable ; ce projectile est supposé animé d'une vitesse initiale de* 700 *mètres à la seconde. Déterminer l'angle de tir, c'est-à-dire l'angle de la bouche à feu avec l'horizontale* AB, *puis la flèche de la trajectoire.*

$g = 9^{m},81$ *par seconde.*

1931. — *Une échelle* AB *est appuyée en* A *contre un mur vertical et repose en* B *sur le plan horizontal; l'angle* OAB *de l'échelle avec la verticale est de* 30° ; *le contact avec le mur vertical a lieu sans frottement ; le contact avec le plan horizontal a lieu avec frottement. On constate que l'échelle reste en équilibre dans cette position ; trouver à quelle limite est supérieur le coefficient de frottement de l'échelle et du plan horizontal sachant que le centre de gravité* G *de l'échelle est au milieu de* AB. (*L'échelle est assimilée à une simple tige* AB.)

1932. — *On considère un cube* ABCDA'B'C'D' *et les centres* ω, ω', α, β, γ, δ *des faces* ABCD, A'B'C'D', ABA'B', BCB'C', CDC'D', DAD'A'. *Montrer que les six points* ω, ω', α, β, γ, δ *sont sommets d'un octaèdre régulier dont on déterminera le volume en fonction de l'arête* a *du cube. On considère les quatre forces représentées par les vecteurs* $\overrightarrow{\alpha\beta}$, $\overrightarrow{\beta\gamma}$, $\overrightarrow{\gamma\delta}$, $\overrightarrow{\delta\alpha}$: *trouver la résultante générale relative à* O, *centre du cube, de ce système et le moment résultant de ce système relativement à un point arbitraire de l'espace.*

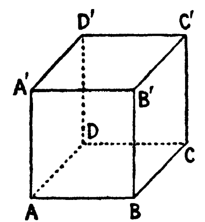


TABLE DES MATIÈRES

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.

Vient de paraître :

Compléments d'Algèbre conformes au programme d'admission à l'Institut agronomique, à l'usage des candidats à cette école et des candidats à d'autres écoles spéciales, par P. MAGRON, professeur agrégé au lycée Henri-Poincaré, à Nancy. — Vol. 22/14cm. . . . . 15 fr. »

Résolution des problèmes élémentaires de Géométrie (*Écoles primaires supérieures. Cours complémentaires. Préparation au B. E.*), par E. J. HONNET, professeur à l'école primaire supérieure de Caen. — Vol. 18/12cm. . . . . 10 fr. »

Ce livre d'initiation à la recherche des problèmes de géométrie convient tout aussi bien aux élèves de l'enseignement secondaire qu'à ceux de l'enseignement primaire supérieur

Relations entre les éléments d'un triangle, recueil de 273 formules relatives au triangle, **avec leurs démonstrations** — Vol. 22/14cm, 4e édition. 13 fr. »

Problèmes d'agrégation (Mathématiques élémentaires), par J. DOLLON, professeur agrégé au lycée de Rouen. — Vol. 22/14cm. . . . 15 fr. »

Ce petit opuscule sera consulté avec profit par les bons élèves de la classe de Mathématiques et les candidats au Concours général.

Exercices de Géométrie moderne *précédés de l'exposé élémentaire des principales théories*, par G. PAPELIER, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur au lycée d'Orléans. — 3 volumes 22/14cm, groupant chacun trois fascicules. . . . . 110 fr. »

On vend les neuf fascicules séparément :

I : *Géométrie dirigée* (Vecteurs, Angles, Aires) : 14 fr. ». — II : *Transversales* : 10 fr. ». — III : *Division et faisceau harmoniques* : 10 fr. ». — IV : *Pôles et polaires* : 14 fr. — V : *Rapport anharmonique* : 12 fr. ». — VI : *Inversion* : 15 fr. 50. — VII : *Homographie* : 15 fr. 50. — VIII : *Involution* : 12 fr. ». — IX : *Géométrie projective, Application aux coniques* : 16 fr. 50.

Table de logarithmes des nombres et Tables des Valeurs naturelles des fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante, cosécante) *de deux minutes en deux minutes d'arc* (système des degrés) *avec évaluation de tous ces arcs dans le système des grades*, par J. GUADET, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur agrégé au lycée Hoche. — Vol. 22/14cm, de 176 pages, cart.. . . . . 15 fr. »

Éléments de Calcul différentiel et intégral, par A. GRANVILLE, président du Collège de Pensylvanie. — Vol. 25/16cm, de 548 pages, avec 275 figures, 3e édition. 50 fr. »

Éléments de Mécanique rationnelle, par P.-F. SMITH et R. LONGLEY, professeurs à l'École scientifique Sheffield de l'Université de Yale. — Vol. 25/16cm, de 320 pages, avec 238 figures. . . . . 45 fr. »

Ces ouvrages, dont le niveau se rapproche sensiblement de celui du certificat de Mathématiques générales, conviennent particulièrement, en raison de leur conception pédagogique, aux élèves travaillant seuls ou à ceux qui sentent la nécessité d'une transition entre les cours du Lycée et ceux de la Faculté, les cours de Mathématiques générales leur paraissant trop élevés. L'étude en est facile et attrayante pour un élève de Mathématiques élémentaires.

Chaque règle, chaque théorème, chaque notion nouvelle fait l'objet d'exemples nombreux traités tout au long, suivis d'exercices non résolus, mais dont l'auteur, avec un sens aigu des nécessités de l'élève, donne le plus souvent la réponse.

Pour chacun de ces deux ouvrages, un prospectus très détaillé est envoyé franco sur demande.